



COMPARACIÓN NUMÉRICA DEL MÉTODO DE LOS  
COEFICIENTES, MÉTODO DIRECTO Y ELEMENTOS FINITOS PARA EL  
DISEÑO DE LOSAS, BIDIRECCIONALES

JORGE IVÁN CHAVERRA PANIAGUA

POLITÉCNICO COLOMBIANO JAIME ISAZA CADAVID  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
INGENIERÍA CIVIL  
MEDELLÍN  
2004

COMPARACIÓN NUMÉRICA DEL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES,  
MÉTODO DIRECTO Y ELEMENTOS FINITOS PARA EL DISEÑO DE LOSAS  
BIDIRECCIONALES

JORGE IVÁN CHAVERRA PANIAGUA

Proyecto

Asesores

Giovanni Martínez Martínez

Ingeniero Civil

Betty Restrepo Arango

Arquitecta

POLITÉCNICO COLOMBIANO JAIME ISAZA CADAVID  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
INGENIERÍA CIVIL  
MEDELLÍN  
2004

Nota de aceptación.

---

---

---

---

---

---

---

Presidente del jurado

---

Jurado 1

---

Jurado 2

MEDELLÍN. 16 DE JUNIO DEL 2004

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	16
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	18
2. HIPÓTESIS	20
3. JUSTIFICACIÓN	22
4. OBJETIVOS	23
4.1 OBJETIVO GENERAL	23
4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
5. MARCO TEÓRICO	25
5.1 DEFINICIÓN DE LOSAS BIDIRECCIONALES	25
5.2 TIPOS DE LOSAS CON ACCIÓN EN DOS DIRECCIONES	25
5.2.1 Losas, soportadas por muros o vigas en todos En todos los bordes	25
5.2.2 Losas planas	27
5.2.3 Losas reticulares	28

	Pág.
5.2.4 Losas de placa plana	29
5.3. CONSIDERACIONES DE LOS SISTEMAS DE LOSAS	30
5.4. COMPORTAMIENTO DE LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES Y APOYADAS EN LOS BORDES	31
5.5. ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES	37
5.5.1 momentos de diseño en la franja central	39
5.5.2 momentos de diseño en la franja de columna	40
5.5.3 condiciones de borde	42
5.5.4 secciones críticas de momento	42
5.5.5 momentos negativos en el apoyo común de paneles de diferente tamaño	43
5.5.6 esfuerzos cortantes de la losa	43
5.5.7 vigas de apoyo	44
5.6 MÉTODO DE DISEÑO DIRECTO	50
5.6.1 consideraciones acerca del método	50

	Pág.
5.6.2 momento estático total para cargas mayoradas	51
5.6.3 asignación de momentos a las secciones críticas	52
5 6.4 distribución lateral de momentos	56
5.6.5 cortantes, de sistemas de losas con vigas	60
5.6.6 límites del espesor del código ASÍ	62
5.6.7 losas sin vigas interiores	63
5.6.8 losas con o sin vigas en todos los lados	64
5.6.9 momentos mayorados en vigas	65
5.6.10 momentos mayorados en las franjas centrales	65
5.6.11 refuerzo a flexión	66
5.7 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	72
5.7.1 introducción	72
5.7.2 métodos de los elementos finitos aplicados a placas	73
6. DISEÑO METODOLÓGICO	76
7. DESARROLLO METODOLÓGICO	78

	Pág.
7.1 EJEMPLO DE CACULO DE UN PANEL EXTERIOR, MACIZA Y ALIGERADA PARA VISUALIZAR MEJOR EL EMPLEO DE DE LAS ECUACIONES POR EL MÉTODO DIRECTO Y DE LOS COEFICIENTES.	79
7.1.1solucion método directo, losa maciza	80
7.1.2 solución método de los coeficientes losa, maciza	91
7.1.3 solución método directo losa aligerada	95
7.1.4 solución método de los coeficientes losa aligerada	106
7.2. MONTAJE DE UNA LOSA TÍPICA CON VARIOS PANELES, PARA SER ANALIZADA POR LOS MÉTODOS DE LOS COEFICIENTES Y DIRECTO, CON LA AYUDA DE HOJAS DE CALCULO, Y LOS ELEMENTOS FINITOS MEDIANTE LA MODELACIÓN EN sap- 2000.	108
7.2.1 Hoja de cálculo, para el análisis por el método directo	110
7.2.2 hoja de calculo para el análisis por el método de los coeficientes	117
7.2.3 Modelación con el programa sap-2000, para el análisis mediante elementos finitos.	120
7.2.4 resultado de los diferentes métodos	140
7.2.5 Análisis de los resultados	141
8. CONCLUSIONES	147
9. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES	150

	Pág.
12. BIBLIOGRAFÍA	151
13. ANEXOS	152

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1 Losas apoyadas en vigas	26
Figura 2 Losas planas	28
Figura 3 Losas reticulares	29
Figura 4 Losas de placa plana	30
Figura 5 Losas apoyadas en bordes libres	32
Figura 6 Losas apoyadas en bordes simples	34
Figura 7 Momentos y variación de momentos en losas cargadas con Apoyos simples en los cuartos bordes	37
Figura 8 Variación de momentos a través del ancho de las secciones Criticas supuestas para el diseño	40
Figura 9 Planta de una losa de piso armada en dos direcciones con Vigas en los ejes de columna	41
Figura 10 Distribución del momento estático total $M_o$ a las secciones Criticas para flexión positiva y negativa	53

	Pág.
Figura 11 Condiciones de restricciones en los bordes para la distribución Del momento estático total $M_0$ a las secciones críticas para luz extrema	54
Figura 12 Panel exterior perteneciente a una losa de entrepiso	79
Figura 13 Coordenadas de los ejes	121
Figura 14 Dibujo de elemento, frame o alambre	122
Figura 15 Definición de materiales	123
Figura 16 Propiedades mecánicas de los materiales	123
Figura 17 Definición de secciones de vigas, viguetas y nervios	124
Figura 18 Dimensiones de las secciones	125
Figura 19 Distancias a la que se ubica cada elemento	126
Figura 20 Esquema general de la losa	127
Figura 21 Selección de elementos estructurales	128
Figura 22 Casos de carga	128
Figura 23 Recuadro de combinación	129
Figura 24 Selección de cargas	131

	Pág.
Figura 25 Selección de la carga uniformemente distribuida	132
Figura 26 Elección de apoyos	133
Figura 27 Elección del tipo de apoyo	133
Figura 28 Análisis de la información	134
Figura 29 Procesamiento de la información	135
Figura 30 Análisis de fuerzas internas y externas	136
Figura 31 Momentos y cortante en los diferentes ejes	137
Figura 32 Diagrama de momentos flectores	138
Figura 33 Deformada de la losa	139

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1 Coeficientes para momentos negativos en la losa	44
Tabla 2 Coeficientes para momento positivo en losas para carga viva	46
Tabla 3 Coeficientes para momento positivo en losas para carga muerta	47
Tabla 4 Fracción de carga $W$ en las direcciones A Y B para fuerzas Secantes en la losa y carga sobre los apoyos	49
Tabla 5 Factores de distribución aplicados al momento estático Total $M_o$ para calcular los momentos positivos y negativos en luz extrema	55
Tabla 6 Momentos en la franja de columna como porcentaje del momento Total en la sección crítica	60
Tabla 7 Espesores mínimos de losas sin vigas interiores	63
Tabla 8 Resultados del análisis, en la dirección Y, para cada una de las secciones críticas de diseño, del panel exterior, y losa Maciza, método directo.	87
Tabla 9 Resultados del análisis, en la dirección X, del panel exterior, para cada una de las secciones críticas de diseño, para Losa maciza, método directo.	90

	Pág.
Tabla 10 Resultados del análisis en la dirección Y, del panel exterior, losa aligerada para cada una de las secciones críticas de diseño, método directo.	103
Tabla 11 Resultados del análisis en la dirección X, panel exterior, losa aligerada, para cada una de las secciones críticas de diseño, método directo.	105
Tabla 12 Momentos negativos y positivos para cada una de las Secciones por los diferentes métodos.	140
Tabla 13 Porcentaje según la similitud de los resultados de los diferentes métodos	145

## LISTA DE GRÁFICOS

	Pág.
Grafico 1 Diagrama de interpolación, para la distribución lateral de momentos en la losa.	59

## GLOSARIO

**ALTURA EFECTIVA:** Es la distancia entre el extremo más comprimido y el centro de gravedad del refuerzo de tracción en secciones sometidas a flexión.

**CARGA MUERTA:** Constituida por el peso propio de la estructura y de los materiales de construcción.

**FRANJAS DE COLUMNAS:** La franja de columna es una franja de diseño con un ancho a cada lado del eje de columnas igual  $0.25 L_2$  o  $0.25 L_1$ , el que sea menor. Las franjas de columnas incluyen las vigas, si las hay. Para losas nervadas, incluyendo el reticulado celular, la franja de columna comprende las viguetas que llegan al capitel, una de las cuales, al menos debe pasar por la columna.

**FRANJA CENTRAL:** Es una franja de diseño limitada por dos franjas de columnas. Para losas nervadas incluyendo el reticulado celular, la franja central comprende las viguetas que no llegan al capitel.

**LOSA:** Elemento estructural horizontal o aproximadamente horizontal, macizo o con nervaduras que trabajan en dos direcciones.

**MOMENTO POSITIVO:** El que produce esfuerzo de tracción en la cara inferior de vigas y losas.

**MOMENTO NEGATIVO:** El que produce esfuerzo de tracción en la parte superior de vigas y losas.

**MODULO DE ELASTICIDAD:** Relación entre el esfuerzo de tracción o de compresión y la deformación unitaria.

**PANEL:** espacio limitado en sus ejes , por vigas

**REFUERZO DE RETRACCIÓN Y TEMPERATURA:** En losas es destinado a resistir los esfuerzos causados por variaciones de temperatura o retracción de fraguado.

**RESISTENCIA DE DISEÑO:** Resistencia nominal de un elemento.

**VIGUETA O NERVADURA:** Elemento estructural que forma parte de una losa nervada la cual trabaja principalmente a fricción.

## INTRODUCCIÓN

Las losas en dos direcciones, son utilizadas para contrarrestar las deflexiones provocadas en ambas direcciones, por cargas gravitatorias o vivas debido a una serie de factores como son: la geometría ( relación ancho largo) y sus condiciones de apoyo.

Una de las estructuras más comunes, pero de mayor complejidad en su cálculo, son las losas bidireccionales. Debido a su análisis estático, y su naturaleza altamente hiperestática . Por esta razón, se ha llevado a cabo muchos intentos analíticos, y empíricos para calcular los momentos flectores y fuerzas secantes en las luces, y la distribución de ellos a lo largo de los ejes principales.

El hecho de que ocurra una gran redistribución de esfuerzos, en tales losas bajo grandes cargas, hace necesario del uso de análisis teóricos, basado en coeficientes empíricos de momentos o métodos aproximados proporcionados por el código ACI (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE) y la NSR-98(NORMA SISMORRESISTENTE COLOMBIANA), existen básicamente dos: método de diseño directo y método de los coeficientes.

Otra forma de análisis para este tipo de losas cuando la geometría en planta se sale de lo común, es la modelación mediante elementos finitos. Creada en 1958. Este método unido a la aparición del computador digital, dieron un vuelco extraordinario en el análisis estructural, y su infinidad de posibilidades para el diseño.

En la práctica ingeniería, este sistema de losas les permite a los Ingenieros tener una herramienta de diseño más funcional, y aplicable a ciertos casos más concretos, a diferencia del análisis de losas unidireccionales que en ocasiones no resulta ser el más recomendable y económico.

## 1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado el grado de complejidad del sistema de losas bidireccionales, debido a su gran indeterminación estática, se ha propuesto para la determinación y análisis una serie de métodos como son: Los plásticos (líneas de influencia) y pórtico equivalente, los cuales deben estar directamente relacionado con su geometría, condiciones y restricciones de apoyo. A la vez estos métodos resultan ser muy complejos, difíciles de comprender y poco prácticos para el análisis de losas de grandes proporciones. Esto se debe a que estos métodos manejan grandes ecuaciones donde se requiere de un gran raciocinio matemático; Perdiéndose así el interés de muchos Ingenieros en el campo estructural por este sistema de losas ,debido a la falta de conocimientos acerca de las ventajas que tiene el sistema, como; funcionalidad, resistencia y economía, y por consiguiente falta de algunas herramientas necesarias y de fácil aplicación para el análisis y diseño.

Todos estos inconvenientes, a hecho que en la actualidad se opten por aquellos sistemas de losas unidireccionales sin ser lo mas funcional y apropiado para casos especiales, y donde se requiera absorber esfuerzos.

Por consiguiente, estos métodos no muestran con claridad para muchos Ingenieros Civiles, el comportamiento y los factores relevantes que afectan estas estructuras.

Además, existen geometrías en plantas de losas irregulares, que por cualquiera de los métodos anteriores no es posible determinar su análisis y posterior

diseño. Es aquí en donde el método de los elementos finitos, es la herramienta más funcional y aplicable.

## 2. HIPÓTESIS

Al determinar, los momentos a lo largo de los ejes, mediante comparación de los métodos de elementos finitos, coeficientes y directo, se obtendrán unos resultados más confiables y justificable de acuerdo al tipo de losa a evaluar.

Al analizar, los diferentes métodos para el cálculo de losas en dos direcciones, sus resultados pueden diferir de uno con respecto al otro, debido a sus limitaciones y alcances para el análisis de una losa en particular.

Con el predimensionamiento, de las diferentes losas, al trabajar directamente con el espesor, se economizan materiales. sin detrimento de la seguridad, resistencia, funcionalidad y economía.

Al caracterizar, de la mejor forma posible, las variables objeto de la investigación, se podrán reorganizar todas estas ideas y establecer un procedimiento fácil y sencillo, para la obtención de los momentos a lo largo de los ejes principales de la losa.

Un buen conocimiento, y una correcta aplicación de los elementos finitos, a la vez con los métodos alternativos (coeficientes y directo), se obtendrán resultados muy similares y coherentes.

Al refinar la malla por elementos finitos, se tendrá resultados más óptimos y aproximados a los esperados.

Al utilizar un método no apropiado, en una losa que no cumpla con sus características, arrojaría resultados algo desfasados.

### 3. JUSTIFICACIÓN

Con este trabajo, se pretende establecer las diferencias entre los métodos de análisis de losas bidireccionales, que son objeto de estudio, buscando sus fortalezas y debilidades frente algún tipo de losas y así dar recomendaciones y criterios de diseño de cada una de los métodos, señalando los casos en que se puede aplicar, y su connotación con respecto a los demás métodos.

Para esta investigación, el método de los elementos finitos nos permiten mostrar como interactúa este sistema mediante un procedimiento sistematizado, como herramienta para agilizar los cálculos numéricos permitir la optimización de tiempo y recursos hacia la obtención de un análisis propuesto.

También, en lo que respecta al análisis de losas en dos direcciones, se obtiene un conocimiento más amplio para hallar soluciones a las inquietudes acerca de este sistema, conociendo sus aplicaciones y ventajas con respecto a los métodos de diseño de las losas unidireccionales.

Se puede analizar este sistema de losas en todos sus aspectos, buscando interrelacionarlo como elemento estructural a los demás sistemas como son: vigas y columnas y cumpliendo con los requisitos; de seguridad, resistencia, funcionalidad y economía.

## 4. OBJETIVOS

### 4.1 OBJETIVO GENERAL

Comparar numéricamente, y en forma sistematizada los resultados de los análisis arrojados, por los método directo, de coeficientes y de elementos finitos para el diseño de losas bidireccional, demostrando las bondades de cada uno de ellos, para el alcance de diseños estructurales con características bien definidas y de acuerdo al proyecto donde se aplican.

### 4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- \* Analizar los efectos de las variables, tanto sus ventajas y desventajas que fluyen alrededor, del método directo y coeficientes, a través de planteamientos teóricos.
  
- \* Conocer los planteamientos matemáticos básicos, en que se fundamenta el método numérico de los elementos finitos. para justificar científicamente el desarrollo de los procesos.
  
- \* Desarrollar un procedimiento fácil y sencillo, para la obtención de los momentos flectores y cortantes a lo largo de los ejes principales de la losa.

\* Elaborar una hoja de cálculo en Microsoft Excel, que realice el análisis y diseño de losas bidireccionales, para los métodos: coeficientes y directo que arroje resultados de una manera más rápida.

\* Realizar el montaje de una losa típica, mediante la modelación por elementos finitos en el programa sap 2002

## 5. MARCO TEÓRICO

### 5.1. DEFINICIÓN

Las losas bidireccionales, son estructuras continuas y de una gran indeterminación estática, la cual se ve influenciada por el tipo de geometría, y apoyo ocasionando esfuerzos significativos en las dos direcciones ortogonales, y por ende momentos flectores proporcionales a estos esfuerzos, y a la vez a la curvatura en ambos sentidos en que se ve influenciada la losa provocando superficies en forma semiesférica. Por este motivo se debe proporcionar refuerzo principal en las dos direcciones.

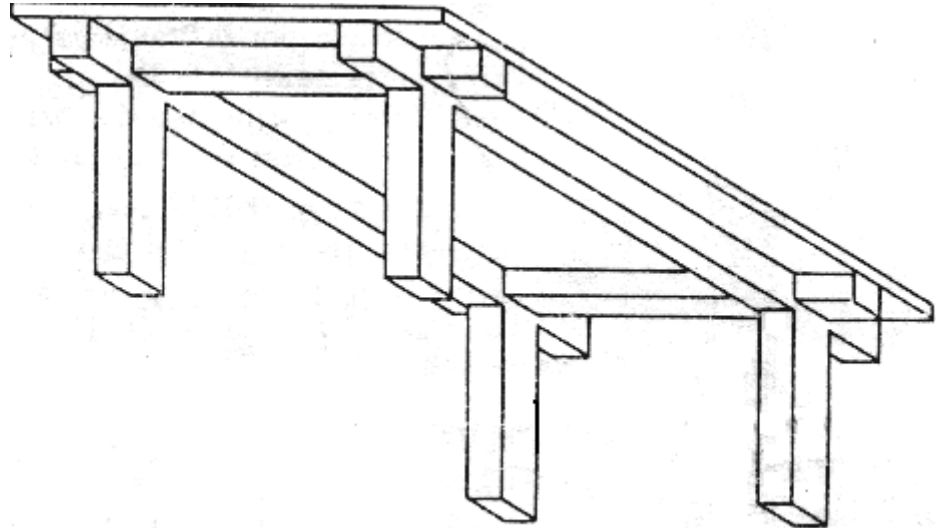
### 5.2 TIPOS DE CONSTRUCCIÓN EN CONCRETO REFORZADO CON ACCIÓN EN DOS DIRECCIONES

#### 5.2.1 Losas soportadas por muros o vigas rígidas en todos los bordes

Son construcciones reforzadas en dos direcciones, la cual incluye; losas macizas en concreto armado, viguetas de concreto con unidades de relleno de concreto hueco o de arcilla cocida, con o sin losa superior de concreto, y viguetas de concreto con losas en la parte superior hechas monolíticamente con las viguetas. La losa debe estar apoyada en muros o vigas en todos sus bordes. El código de edificaciones ACI 1963, establece, que una losa debe ser diseñada por métodos aprobados que tengan en cuenta; el efecto de continuidad y rigidez en los apoyos, la relación entre la longitud y ancho de la losa y el efecto de la acción en dos direcciones. La

(figura 1), muestra una losa maciza en dos direcciones apoyadas en todos los bordes.<sup>1</sup>

Figura 1 Losas apoyadas en vigas



Diseño de concreto Armado EVERARD NOEL J. pagina 253  
TANNER JOHN L.

Para el diseño de este tipo de losas, será como máximo el doble del claro menor. Además su cálculo resulta difícil, por su alto grado de indeterminación, y los procedimientos aproximados de cálculo han demostrado resultados bastante rudimentarios.

---

<sup>1</sup> EVERARD noel j. ,TANNER john l.Diseño de concreto Armado, 1996. p. 253

### 5.2.2 Losas planas

Son aquellas, que transmiten la carga directamente a las columnas, sin necesidad de colocar vigas. Estas pueden ser aligeradas o macizas. Su espesor puede ser constante, o tener una franja con espesor menor en la parte central de los tableros; pero dicha zona, deberá quedar dentro del área de intercepción de las franjas centrales.<sup>2</sup>

“Esta Incorpora, una región con un sobre espesor de losa, en la vecindad de la columna, y emplea, con frecuencia columnas con forma acampanada, en la parte superior. Ambos, son mecanismos para reducir los esfuerzos generados, por cortante y flexión negativa alrededor de las columna, respectivamente”<sup>3</sup>

El espesor de las franjas centrales, en la intercepción antes mencionado será por lo menos de 2/3 del resto de la losa, y nunca menor de 10 cm, si la losa tiene ábacos.

La losa, se podrá apoyar directamente sobre las columnas o a través de; ábacos, capiteles o bien mediante la combinación de ambos, como se muestra en la (figura 2). Cuando se utilicen capiteles, o ábacos, deberán construirse bajo ciertas restricciones.

Tratándose, de una losa plana aligerada, esta, deberá contar con una zona maciza por lo menos de 2.5h, a cada lado del paño de la columna o del borde

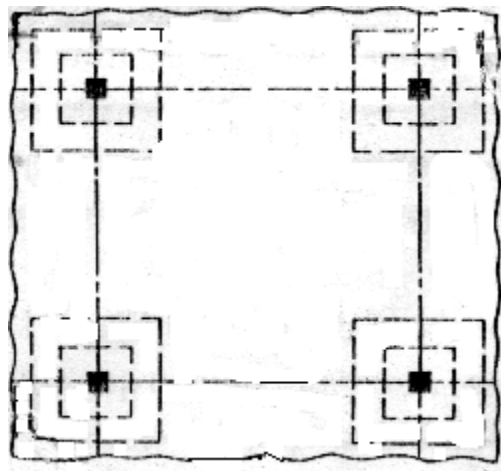
---

<sup>2</sup> PEREZ ALAMA, vicente calculo de estructuras de concreto reforzado trillas,1993 p 171

<sup>3</sup> ARTHUR, nilson diseño de estructuras de concreto reforzado: mac GraWhill, 1999, p 365

del capitel. El reglamento determina, la necesidad de dejar zonas macizas, adyacentes a muros de rigidez por lo menos  $2.5h$  a partir del paño del muro

Figura 2 Losas planas



Diseño de Estructuras de concreto Reforzado ARTHUR Nilson pagina 366

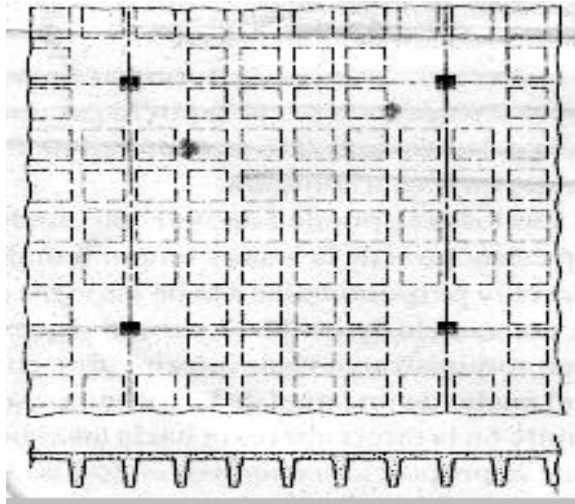
### 5.2.3 Losas reticulares

Son losas, con viguetas en dos direcciones, con el fin de reducir la carga muerta, de la construcción de losas macizas, se forman vacíos en un patrón rectilíneo mediante la utilización de moldes de aligeramiento contruidos en metal o en fibra de vidrio. Se obtiene así una construcción nervada en dos direcciones. Por lo general, los aligeramientos se omiten cerca de las columnas de manera que se forma una losa maciza para resistir mejor, los momentos y cortantes en estas áreas.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> *ibid.*, p. 365

Figura 3 Losas reticulares



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson pagina 366

El tipo más simple, de losa, con acción en dos direcciones, es el de losas apoyadas en todos sus bordes por; vigas monolíticas de concreto relativamente altas y rígidas, por muros o vigas maestras de acero.

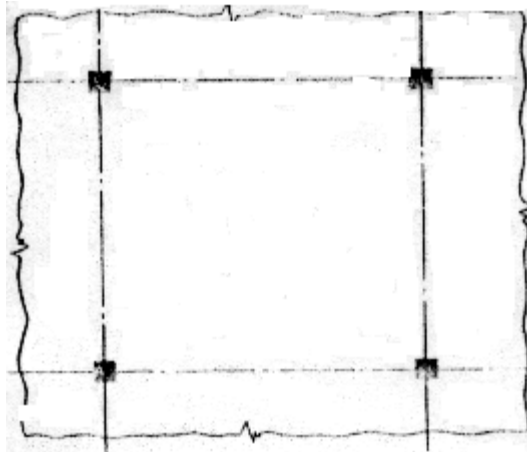
#### 5.2.4 Losas de placa plana

“En algunos casos, las losas de concreto se pueden apoyar, directamente sobre columna, sin la utilización de vigas secundarias o principales, y se utilizan a menudo cuando las luces son; muy largas y las cargas no son particularmente pesadas”<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Ibid., p. 365

Figura 4 Losas de placa plana



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR nilson Pgina 366

### 5.3 CONSIDERACIONES ACERCA DE LOS SISTEMAS DE LOSAS

Las losas, bidireccionales, son muy complejas y estáticamente indeterminadas. Por tal motivo, y tras muchos años se han realizado intentos tanto analíticos, como empíricos, para determinar las sollicitaciones de diseño de este tipo de losas, la cual depende de las cargas y las condiciones de apoyo para la división de momentos y fuerzas secantes en las dos luces.

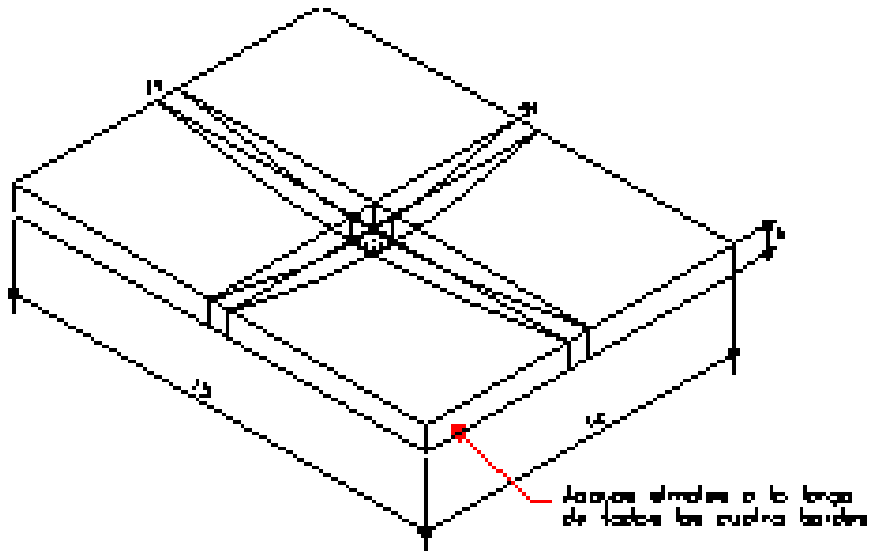
El código de edificaciones ACI de 1963, ha plasmado estos efectos, en unos coeficientes en unas tablas de diseño, de losas para las cargas, y las condiciones de apoyo (o de carencia de apoyo) mas frecuentes (empotramiento o continuidad total, apoyo fijo con posibilidad de rotación, borde libre o voladizo), y en casos de geometrías, y cargas excepcionales es puede utilizar los métodos de las diferencias finitas o de los elementos finitos. Estos coeficientes se basan en hipótesis de homogeneidad y elasticidad que el concreto reforzado no cumple. Por esta razón, para el análisis de este tipo de

losas, los métodos actualmente en uso se apartan de la solución matemática elástica. Utilizando, de una parte coeficientes aproximados deducidos a partir del análisis elástico, y de la redistribución inelástica con el fin de disminuir el grado de complejidad que encierra este sistema de losas, en los denominados métodos de los coeficientes y por otra parte estudiando el comportamiento inelástico del concreto en los métodos plásticos de análisis y diseño

#### 5.4 COMPORTAMIENTO DE LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES Y APOYADAS EN LOS BORDES.

Para realizar, mas fácil el análisis, y comportamiento este tipo de losas, esta se divide en dos conjuntos de franjas paralelas en cada dirección y de ancho unitario, las cuales se interceptan para soportar parte de la carga  $Q$  en  $X$  y en  $Y$ , y esta a un par de soportes. La (figura 5) expone dos franjas centrales de una placa rectangular en las cuales actúan, como unas vigas simplemente cargadas de manera uniforme.

Figura 5 Losas apoyadas en bordes libres  
(Flexión franja central de la losa )



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson Pagina 363

“Las deflexiones, en el punto de intercepción deben ser las mismas. Si se igualan estas franjas, luz corta, y los larga, y al igualar las deflexiones se obtiene”.<sup>6</sup>

$$\frac{5 * W_a * L_a^2}{384EI} = \frac{5 * W_b * L_b^2}{384EI} \quad (5)$$

<sup>6</sup> Ibid., p. 363

En donde  $W_a$ , es la fracción de carga  $W$ , que corresponde a la luz corta, y  $W_b$ , es la otra fracción que se transmite en la dirección larga, en consecuencia.

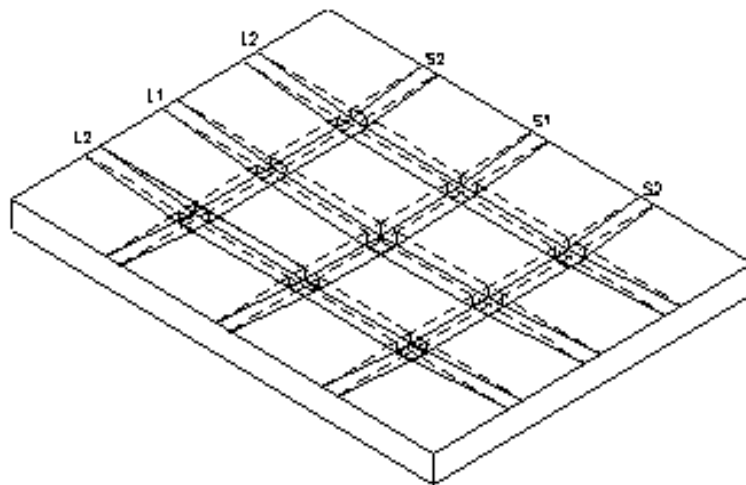
$$\frac{W_a}{W_b} = \frac{L_b^2}{L_a^2} \quad (5)$$

La relación, entre las dos porciones de carga, es inversamente proporcional a la relación de las luces elevadas a la cuarta potencia. Cuando la relación,  $m=L_b/L_a$  se hace mas grande, estimadamente valores mayores o iguales a dos.  $W_a$  tomara en si, casi toda la carga  $W$ , y  $W_b$ , una pequeña porción de ella, provocando así un efecto en la dirección perpendicular, a la luz larga.

Utilizando estas expresiones, para idénticas condiciones de borde, y losa cuadrada  $m=1.0$ , se obtiene, que la carga se reparte en partes iguales en cada dirección, que a diferencia de una losa con  $m=0.5$ , el 94%, de la carga será soportada por la luz corta, y el 6%, en la luz larga. Por consiguiente se podría concluir, que la losa, un efecto ideal para el armado en dos direcciones, es la de paneles cuadrados, y su conveniencia va disminuyendo a medida que aumenta su rectangularidad, de tal manera que para  $m=0.5$ , se debe armar en una dirección, en el sentido de luz mas corta. Por otra parte, será mas obvio el armado en dos direcciones cuando sea de interés repartir su carga, o sus efectos. Sin embargo, también existen franjas en los bordes del panel paralelas a la misma, llamadas; franjas de columnas, en la cual se apoya junto con las ortogonales, para disminuir así la deflexión, y por consiguiente los momentos flectores al distribuirlos a lo largo y ancho de las franjas, primero de las franjas centrales y de estas hacia las de columnas.

A manera de ejemplo, para analizar mejor el efecto torsional, se podría tomar la( figura 6), donde esta subdividido en tres pares de franjas, en cada dirección.

Figura 6 Losas apoyadas en bordes simples  
(modelo reticular de losa)



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson Pagina 363

Las franjas centrales, no tienen este efecto, solo intervienen los momentos flectores, pero en la intersección de la franja extrema S2 Y L2, se notan que no solo se doblan si no que se tuercen.

Por ejemplo, de las intersecciones de S2 con L2, el borde exterior de la franja L2 se encuentra más levantada que su borde interior, mientras que el extremo próximo a la franja L2, los bordes se encuentran a la misma elevación. La franja, esta sometida a torsión. Esta torcedura produce esfuerzos y momentos de torsión, que son mas pronunciados cerca de las esquinas, provocando fallas locales en las vecindades. Para tal caso, se debe

proporcionar refuerzo especial en esta zona, propuestas por el código ACI, que va hasta un quinto de la luz mas larga medida desde el vértice. Hay que tener en cuenta también, que estos momentos torsionales alivianan parten de los momentos flectores, en consecuencia la carga total de la losa es tomada no solo por los momentos flectores en las dos direcciones, sino también por los momentos de torsión.

Por esta razón, los momentos flectores en la losa elástica al ser menores de los que resultan del cálculo que supone un conjunto de franjas desconectadas y cargadas con  $W_a$  y  $W_b$ .

Por ejemplo, una losa simplemente apoyada  $W_a = W_b = W/2$ , si únicamente estuviera sometida a flexión, el momento máximo en cada franja seria:

$$\frac{\left(\frac{W}{2}\right) * L^2}{8} = 0.0625wl^2 \quad (5.1)$$

“La teoría exacta de deflexión de placas elásticas, demuestran que en realidad, el momento máximo de esta losa cuadrada, es apenas  $0.048 * W * L$ , así que en este caso los momentos de torsión alivianan los momentos flectores casi el 25%”<sup>7</sup>

Por ejemplo, si se sobrecargara la franja central, hasta que el acero entrara en fluencia, si fuera una viga aislada esto significaría la falla .Pero esto no es posible, debido a que la porción de carga que no es capaz de soportar la franja

---

<sup>7</sup> Ibid.,p. 363

es asumida tanto por las franjas perpendiculares, como las paralelas, son un todo, están unidas entre si monolíticamente, hasta que estas comienzan a fluir. Esta redistribución inelástica, seguirá continuando hasta que una porción grande central de losa entre en fluencia, solamente en este caso la losa fallara.

Según se ha demostrado, en ensayos en los cuales se concluye que las losas no necesitan diseñarse con el máximo momento absoluto en cada una de las direcciones, como el valor de  $0.048 \cdot W \cdot L$ , si no, para un momento promedio menor en la zona central en cada una de las direcciones<sup>8</sup>.

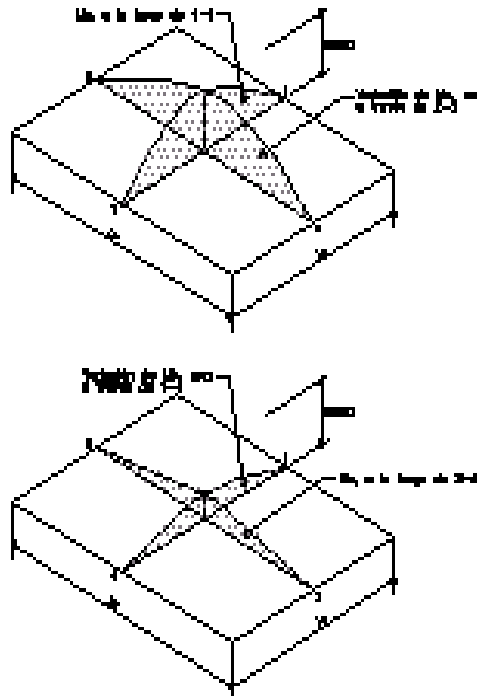
Por ejemplo, se permite diseñar para un a losa cuadrada, un momento de  $0.036 \cdot W \cdot L$ , se observa que hay un 25% de reducción con respecto al momento absoluto, gracias a la redistribución inelástica.

El mayor momento, se presenta en el centro de la luz de la franja corta s1, de (la figura 7). Es evidente que la curvatura, y por tanto el momento, en la franja corta s2, es menor que en el sitio correspondiente de la franja s1. En consecuencia, se presenta una variación del momento de la luz corta, en la dirección larga de la luz. Esta variación se ilustra cualitativamente en la (figura 7). El diagrama de momentos de la luz corta de la figura, es valida solo a lo larga de la franja central en 1-1, para otras secciones, el valor del momento máximo es menor, como aparece .En Las otras ordenadas de momento se reducen en forma proporcional. De igual modo, el diagrama de momentos de la luz larga de la figura, es aplicable únicamente en la línea central longitudinal.

---

<sup>8</sup> Ibid.,p. 564

Figura 7 Momentos y variación de momentos, en losas cargadas con apoyos simples en los cuatro bordes.



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson pagina 364

### 5.5. ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES

Este método, originalmente fue desarrollado por Marcus, y empleado a menudo en Europa. Fue introducido a los Estados Unidos por Rogers. Desde 1963, de acuerdo al código ACI, se utiliza en forma amplia para losas soportadas en los bordes por muros , vigas de

acero, o vigas monolíticas de concreto , cuya altura total no sea menor, que aproximadamente 3 veces el espesor de la losa <sup>9</sup>.

Este es un método, simplificado, que a la vez contrarresta las complejidades, que por razones de continuidad en los bordes soportados es matemáticamente difícil de entender, y no es práctico para el diseño.

El método de los coeficientes, es hasta ahora el mas utilizado por Ingenieros para el caso especial de losas armadas en dos direcciones, apoyadas en vigas de borde relativamente rígidas en los cuatro lados de cada uno de los paneles de la losa . Estas vigas se consideran rígidas ante deflexiones verticales, para efectos de aplicación del presente método, cuando el parámetro  $\alpha$ , es mayor o igual a 0.5.

Al igual que los diferentes métodos utilizados para el análisis de este tipo de losas. Estas deben, satisfacer condiciones de equilibrio y de compacidad geométrica, siempre en cuando se demuestre que la resistencia de diseño en cada sección es por lo menos igual ala resistencia requerida, y que se cumple los requisitos de funcionamiento.

Este método, se basa en unas tablas de coeficientes que cubren varias condiciones, las cuales se basan en análisis elásticos, y de redistribución inelástica.

---

<sup>9</sup> ibid.,p. 365

Para este método, el momento de diseño en cada dirección es el menor que el máximo momento elástico en esa dirección. Los momentos en las franjas centrales en ambas direcciones se calculan apartar de.

#### 5.5.1 Momentos de diseño en la franja central

(Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 289)

Los momentos de diseño en la franja central, deben calcularse utilizando las tablas de la 1 a la 4, que corresponden a Mo(-)continuo, M(+)carga muerta, M(+)carga viva, y la fracción de carga para cortante. Utilizando así las siguientes ecuaciones.

$$M_a = C_a * W * L_a^2 \quad (5.2)$$

$$M_b = C_b * W * L_b^2 \quad (5.3)$$

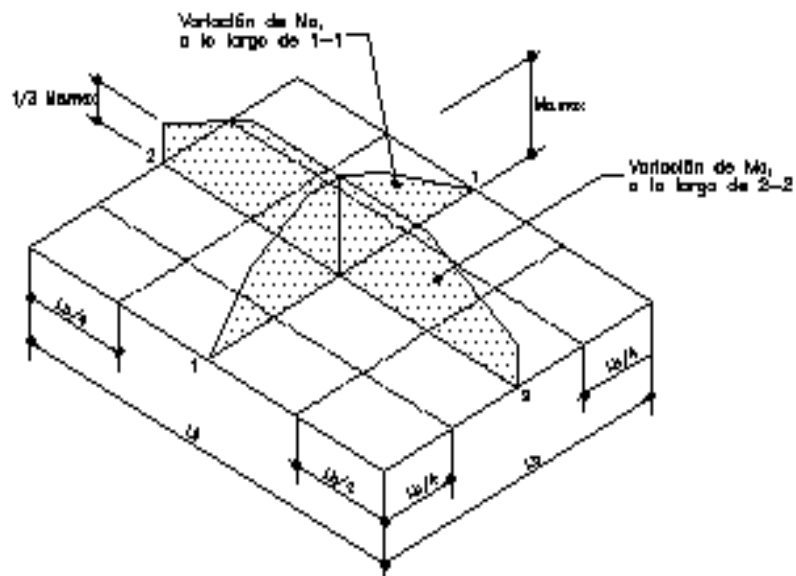
Donde:

$C_a, C_b$  = Coeficientes de momentos tabulados

$W$  = Carga uniforme

$L_a, L_b$  = Longitud de la luz libre en las dos direcciones corta y larga, respectivamente.

Figura 8 Variación de momentos a través del ancho de las secciones críticas supuestas para el diseño



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson pagina 366

El método establece, que se debe dividir la losa en franjas centrales, igual a la mitad del panel, y franjas de columnas en cada dirección, cuyo ancho es igual a un cuarto de la luz del panel en esa dirección, como muestra la (figura 8), donde ocurren los mayores momentos. Por tal razón, es que se debe diseñar para toda la losa, con el momento total estipulado.

#### 5.5.2 Momentos de diseño en la franja de columna

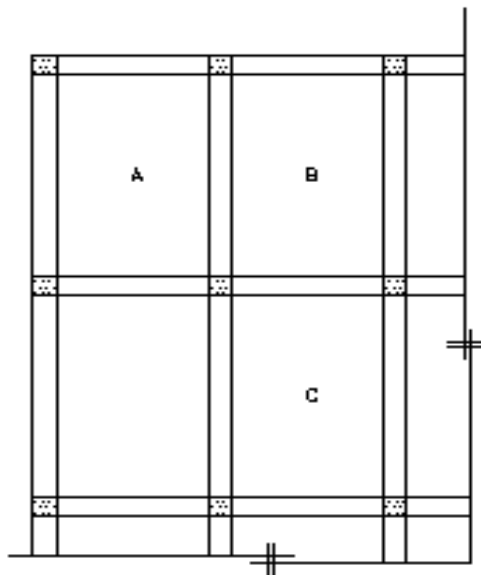
Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 28

Los momentos de diseño, en la franja de columna, deben reducirse gradualmente de su valor total  $M_a$ , o  $M_b$  en el límite de la franja central, a  $1/3$  de estos valores en el borde del panel.

Hasta ahora, se ha hecho el análisis para un panel individual simplemente apoyado en los cuatro bordes.

En la (figura 9), se pueden, mostrar tres casos, en los cuales se ve influenciado el análisis de los momentos, que para los supuestos antes mencionados para un panel apoyado en todos sus lados.

Figura 9 Planta de una losa de piso armada en dos direcciones con vigas en los ejes de columna.



El panel A, tiene dos lados discontinuos y dos continuos adyacentes a los paneles vecinos. El panel B, tiene un lado discontinuo y tres continuos, el C, tiene todos sus cuatro lados continuos. Esta es una situación real, de un sistema de vigas que soporta una losa armada en dos direcciones.

#### 5.5.3 Condiciones de borde.

Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCION SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 289

En la aplicación, del método, se consideran dos condiciones de borde para efectos de la rigidez, a flexión de la losa en el apoyo de borde, como:

- a) Cuando la viga, en el apoyo de borde es suficiente rígida a torsión, el apoyo puede considerarse equivalente a un apoyo central continuo.
  
- b) Cuando la viga de apoyo, en el borde tiene una rigidez torsional despreciable, la losa debe considerarse que tiene un apoyo no continuo. En este último caso, el momento negativo de diseño de la losa en el borde, debe ser igual, a un tercio del momento positivo de diseño.

#### 5.5.4 Secciones criticas para momento.

Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 289

Las secciones críticas para momento en cualquiera de las dos direcciones, son las siguientes:

- a) Para momentos negativos, los bordes de los paneles en la cara de los apoyos.

b) Para momento positivo, los centros de los paneles.

#### 5.5.5. Momentos negativos, en el apoyo común de paneles de diferente tamaño

Cuando el momento negativo, en un lado del apoyo sea menor del 80 %, del correspondiente al otro lado del apoyo, la diferencia debe distribuirse en proporción a la rigidez relativa de las losas.

El momento negativo, que actúa en una franja muy larga de una losa rectangular independiente de su longitud, es prácticamente igual al momento obtenido de una losa cuadrada de lado igual a la dimensión de una losa rectangular en el sentido corto.

#### 5.5.6 Esfuerzos cortantes en la losa

Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 289

Los esfuerzos cortantes, en la losa, deben calcularse bajo la suposición de que la carga en el panel se distribuya a los apoyos en la proporción indicada en la (tabla 4).

### 5.5.7 Vigas de apoyo

(Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 289)

Las cargas, sobre las vigas de apoyo del panel rectangular en dos direcciones, se calculan utilizando las proporciones de carga, para cada una de las direcciones, indicadas en la tabla. Estas, pueden considerarse como cargas uniformemente distribuidas sobre toda la longitud de la viga. En ningún caso, la carga sobre la viga, que salva la luz corta puede ser menor, que la carga aferente de una área de losa contenida por la viga y dos líneas trazadas a 45 grados, a partir de las esquinas del panel, y la carga equivalente uniformemente repartida sobre la viga debe ser.

TABLAS DE COEFICIENTES PARA EL CÁLCULO DE LOS MOMENTOS POSITIVOS Y NEGATIVOS SEGÚN LA CONDICIÓN DE CARGA Y EL TIPO DE CONTINUIDAD O DISCONTINUIDAD EN LOS APOYOS

TABLA 1 COEFICIENTES PARA MOMENTOS NEGATIVOS EN LOSAS

$$M_{aneg} = C_{aneg} * W * l_a^2$$

$$M_{bneg} = C_{bneg} * W * l_b^2$$

En donde W=carga muerta mas viva



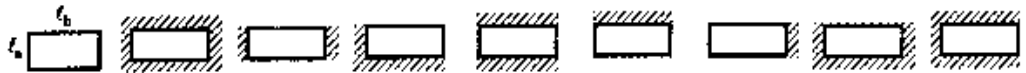
(Relació M=A/B)	CASO 1	CASO2	CASO3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO 8	CASO9
1.00									
CAneg		0.045		0.050	0.075	0.071		0.033	0.061
CBneg		0.045	0.076	0.050			0.071	0.061	0.033

(Relació M=A/B)	CASO 1	CASO2	CASO3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO 8	CASO9
0.90 CAneg CBneg		0.055 0.037		0.060 0.040	0.080	0.079		0.043 0.052	0.068 0.025
0.85 CAneg CBneg		0.060 0.031		0.066 0.034	0.082	0.083		0.049 0.046	0.072 0.021
0.80 CAneg CBneg		0.065 0.027	0.061	0.071 0.029	0.083	0.086	0.051	0.055 0.041	0.075 0.017
0.75 CAneg Cbneg		0.069 0.022		0.076 0.024	0.085	0.088		0.061 0.036	0.078 0.014
0.70 CAneg Cbneg		0.074 0.017		0.081 0.019	0.086	0.091		0.068 0.029	0.081 0.011
0.65 CAneg Cbneg		0.077 0.014		0.085 0.015	0.087	0.093		0.074 0.024	0.083 0.008
0.60 CAneg Cbneg		0.081 0.010		0.089 0.011	0.088	0.095		0.080 0.018	0.085 0.006
0.55 CAneg		0.084		0.092	0.089	0.096		0.085	0.086
0.50 CAneg Cbneg		0.086 0.006		0.094 0.006	0.090	0.097		0.089 0.010	0.088 0.003

Sacadas del libro : Diseño de Concreto Armado, NOEL J.EVERARD, JOHN L. TANNER 1996 pagina 258

TABLA 2 COEFICIENTES PARA MOMENTOS POSITIVOS EN LOSAS PARA CARGA MUERTA

$$M_{a pos} = C_{acm} * W * L a^2$$



Relación M=A/B	CASO 1	CASO2	CASO 3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO8	CASO9
1.00									
CAneg	0.036	0.018	0.018	0.027	0.027	0.033	0.027	0.020	0.023
CBneg	0.036	0.018	0.027	0.027	0.018	0.027	0.033	0.023	0.020
0.95									
CAneg	0.040	0.020	0.021	0.030	0.028	0.036	0.031	0.022	0.024
CBneg	0.033	0.016	0.025	0.024	0.015	0.024	0.031	0.021	0.017
0.90									
CAneg	0.045	0.022	0.025	0.033	0.029	0.039	0.035	0.025	0.026
CBneg	0.029	0.014	0.024	0.022	0.013	0.021	0.028	0.019	0.015
0.85									
CAneg	0.050	0.024	0.029	0.036	0.031	0.042	0.040	0.029	0.028
CBneg	0.026	0.012	0.022	0.019	0.011	0.017	0.025	0.017	0.013
0.80									
CAneg	0.056	0.026	0.034	0.039	0.032	0.045	0.045	0.032	0.029
CBneg	0.023	0.011	0.020	0.016	0.009	0.015	0.022	0.015	0.010
0.75									
CAneg	0.061	0.028	0.040	0.043	0.033	0.048	0.051	0.036	0.031
Cbneg	0.019	0.009	0.018	0.013	0.007	0.012	0.020	0.013	0.007
0.70									
CAneg	0.068	0.030	0.046	0.046	0.035	0.051	0.058	0.040	0.033
Cbneg	0.016	0.007	0.016	0.011	0.005	0.009	0.017	0.011	0.006
0.65									
CAneg	0.074	0.032	0.054	0.050	0.036	0.054	0.065	0.044	0.034
Cbneg	0.013	0.006	0.014	0.009	0.004	0.007	0.014	0.009	0.005

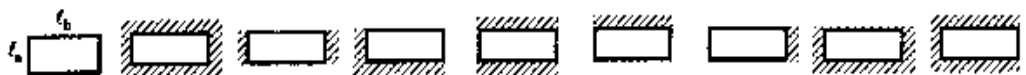
Relación M=A/B	CASO 1	CASO2	CASO 3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO8	CASO9
0.55									
Caneg	0.088	0.035	0.071	0.056	0.038	0.058	0.081	0.052	0.037
Cbneg	0.008	0.003	0.009	0.005	0.002	0.004	0.009	0.005	0.003
0.50									
Caneg	0.095	0.037	0.080	0.059	0.039	0.061	0.089	0.056	0.038
Cbneg	0.006	0.002	0.007	0.004	0.001	0.003	0.007	0.004	0.002

(Sacadas del libro : Diseño de Concreto Armado, NOEL J.EVERARD, JOHN L. TANNER 1996 pagina 259)

TABLA 3 COEFICIENTES PARA MOMENTO POSITIVO EN LOSA PARA CARGA VIVA

$$M_{a pos} = C_{acv} * W * l_a^2$$

$$M_{b pos} = C_{bcv} * W * l_b^2$$

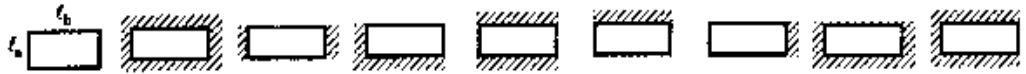


Relación M=A/B	CASO 1	CASO2	CASO3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO8	CASO9
		1.00							
	0.036	Caneg	0.027	0.032	0.032	0.035	0.032	0.028	0.030
	0.036	CBne	0.032	0.032	0.027	0.032	0.035	0.030	0.028
0.95									
Caneg	0.040	0.030	0.031	0.035	0.034	0.038	0.036	0.031	0.032
CBneg	0.033	0.025	0.029	0.029	0.024	0.029	0.032	0.027	0.025
0.90									
Caneg	0.045	0.034	0.035	0.039	0.037	0.042	0.040	0.035	0.036
CBneg	0.029	0.022	0.027	0.026	0.021	0.025	0.029	0.024	0.022

Relación M=A/B	CASO 1	CASO2	CASO3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO8	CASO9
0.80									
Caneg	0.056	0.041	0.045	0.048	0.044	0.051	0.051	0.044	0.042
CBneg	0.023	0.017	0.022	0.020	0.016	0.019	0.023	0.019	0.017
0.75									
Caneg	0.061	0.045	0.051	0.052	0.047	0.055	0.056	0.049	0.046
Cbneg	0.019	0.014	0.019	0.016	0.013	0.016	0.020	0.016	0.013
0.70									
Caneg	0.068	0.049	0.057	0.057	0.051	0.060	0.063	0.054	0.050
Cbneg	0.016	0.012	0.016	0.014	0.011	0.013	0.017	0.014	0.011
0.65									
Caneg	0.074	0.053	0.064	0.062	0.055	0.064	0.070	0.059	0.054
Cbneg	0.013	0.010	0.014	0.011	0.009	0.010	0.014	0.011	0.009
0.60									
Caneg	0.081	0.058	0.071	0.067	0.059	0.068	0.077	0.065	0.059
Cbneg	0.010	0.007	0.011	0.009	0.007	0.008	0.011	0.009	0.007
0.50									
Caneg	0.095	0.066	0.088	0.077	0.067	0.078	0.092	0.076	0.067
Cbneg	0.006	0.006	0.007	0.005	0.004	0.005	0.007	0.005	0.004

Sacadas del libro : Diseño de Concreto Armado, NOEL J.EVERARD, JOHN L. TANNER 1996 pagina 260

TABLA 4 FRACCIÓN DE CARGA W EN LAS DIRECCIONES AY B PARA FUERZA SECANTE EN LA LOSA Y CARGA SOBRE LOS APOYOS



Relación M=A/B	CASO 1	CASO2	CASO3	CASO4	CASO5	CASO6	CASO7	CASO8	CASO9
1.00									
Caneg	0.50	0.50	0.17	0.50	0.83	0.71	0.29	0.33	0.67
CBneg	0.50	0.50	0.83	0.50	0.17	0.29	0.71	0.67	0.33
0.95									
Caneg	0.55	0.55	0.20	0.55	0.86	0.75	0.33	0.38	0.71
CBneg	0.45	0.45	0.80	0.45	0.14	0.25	0.67	0.62	0.29
0.90									
Caneg	0.60	0.60	0.23	0.60	0.88	0.79	0.38	0.43	0.75
CBneg	0.40	0.40	0.77	0.40	0.12	0.21	0.62	0.57	0.25
0.85									
Caneg	0.66	0.66	0.28	0.66	0.90	0.83	0.43	0.49	0.79
CBneg	0.34	0.34	0.72	0.34	0.10	0.17	0.57	0.51	0.21
0.80									
Caneg	0.71	0.71	0.33	0.71	0.92	0.86	0.49	0.55	0.83
CBneg	0.29	0.29	0.61	0.29	0.08	0.14	0.51	0.45	0.17
0.75									
Caneg	0.76	0.76	0.39	0.76	0.94	0.88	0.56	0.61	0.86
Cbneg	0.24	0.24	0.61	0.24	0.06	0.12	0.44	0.39	0.14
0.70									
Caneg	0.81	0.81	0.45	0.81	0.95	0.91	0.62	0.68	0.89
Cbneg	0.19	0.19	0.55	0.19	0.05	0.09	0.38	0.32	0.11
0.60									
Caneg	0.89	0.89	0.61	0.89	0.97	0.95	0.76	0.80	0.94
Cbneg	0.11	0.11	0.39	0.11	0.03	0.05	0.24	0.20	0.06
0.55									
Caneg	0.92	0.92	0.69	0.92	0.98	0.96	0.81	0.85	0.95
Cbneg	0.08	0.08	0.31	0.08	0.02	0.04	0.19	0.15	0.05
0.50									
Caneg	0.94	0.94	0.76	0.94	0.99	0.97	0.86	0.89	0.97
Cbneg	0.06	0.06	0.24	0.06	0.01	0.03	0.14	0.11	0.03

Sacadas del libro : Diseño de Concreto Armado, NOEL J.EVERARD, JOHN L. TANNER 1996 pagina 259

## 5.6 MÉTODO DE DISEÑO DIRECTO

“El método de diseño, directo, se basa en la determinación del momento estático ( $M_0$ ), obtenido a través de una franja limitada por los ejes centrales de dos tableros o paneles adyacentes al eje de los apoyos “<sup>10</sup>

“El momento estático total, se obtiene para cada claro, tanto para las franjas de columnas, como para las franjas centrales, en ambos sentidos. Aunque este método, es de fácil aplicación, esta debe cumplir una serie de condiciones “<sup>11</sup>

### 5.6.1 Consideraciones acerca del método

1. Debe haber, como mínimo tres luces continuas en cada dirección.
2. Las longitudes de las luces sucesivas en cada dirección, no deben exceder de más de un tercio de la luz mas larga.
3. Las columnas, pueden corercon hasta un 10%, de su respetiva luz, en la dirección del desplazamiento con respeto a cualquier eje de columnas.
4. Las cargas, las genera únicamente la gravedad, la carga viva no debe exceder 3 veces la carga muerta.

---

<sup>10</sup> ARTHUR Nilson Diseño de estructuras de concreto:Mac Gra Whill. 1999. p. 174

<sup>11</sup> \_\_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ Mac Gra Whill. 1999. p 174

5. Los paneles deben ser rectangulares, en la cual la relación de las luces largas con las luces cortas, no debe exceder de dos.

6. si se utilizan vigas, en los ejes de columnas, las rigideces relativas de las vigas en las dos direcciones perpendiculares, determinada por la relación  $\alpha L2/L1$ , debe estar entre 0.2 y 0.5.

“El reglamento ACI establece también, que el valor de los momentos negativos, se encuentran en los paños de los apoyos perpendiculares a la flexión, o en el paño de las secciones críticas cuando se trata de columnas con capitel”<sup>12</sup>.

#### 5.6.2 Momento estático total para cargas mayoradas

Con el fin de calcular el momento estático total  $M_o$  en un panel, se utiliza la luz libre  $L_n$ , en dirección de los momentos. La luz libre, se define como la distancia entre caras de columnas, capiteles, mensulas o muros, pero no debe ser menor que  $0.65L1$ . El momento mayorado total, en una luz para una franja limitada lateralmente por la línea central de los paneles a cada lado del eje central entre apoyos.<sup>13</sup> esta dada por:

$$M_o = \frac{W_u * L2 * l_n^2}{8} \quad (5.4)$$

Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 283

---

<sup>12</sup> Ibid.,p. 174

<sup>13</sup> Ibid.,p. 385

Cuando las distancias, de centro a centro al eje de apoyo para cada uno de los paneles adyacentes son diferentes, se debe tomar como  $L_2$ , el promedio de las luces transversales adyacentes.

### 5.6.3 Asignación de momentos a las secciones críticas

Existen dos tipos de luces, para la distribución de los momentos, y de esta también dependen, el grado de restricción a flexión que ofrece un determinado apoyo que puede ser; en columnas, apoyadas en vigas con columnas o muros.

El primer caso, es el de luces interiores, el momento estático se reparte a las secciones críticas a flexión; positiva y negativa de acuerdo con las relaciones siguientes:

Momento negativo mayorado  $M_u \text{ negativo} = 0.65 * M_o$

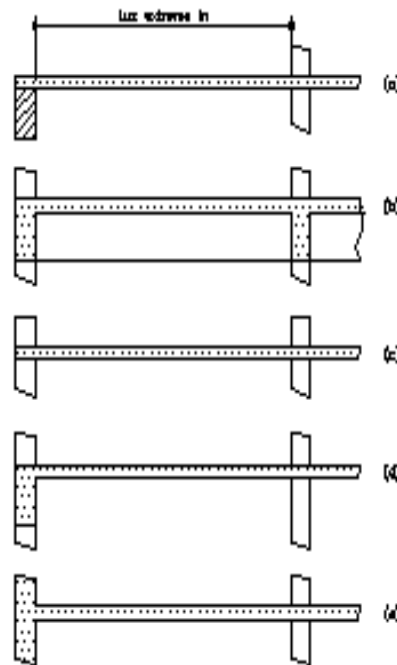
Momento positivo mayorado  $M_u \text{ positivo} = 0.35 * M_o$

Según la (figura.10), los  $M(-)$ , se toman en la cara de los apoyos, y el  $M(+)$ , esta en todo el centro de la luz.

Para el caso dos, de luces extremas en la cual existen tanto  $M(-)$  exterior, positivo,  $M(-)$  interior. A estas, secciones críticas, se va repartir el momento estático.

El código ACI, establece cinco conjuntos alternativos para estimar los coeficientes de momentos para las luces extremas, de la (figura 11).

FIGURA 11 Condiciones de restricciones en los bordes, para la distribución del momento estático total  $M_o$ , a las secciones críticas para luz extrema.

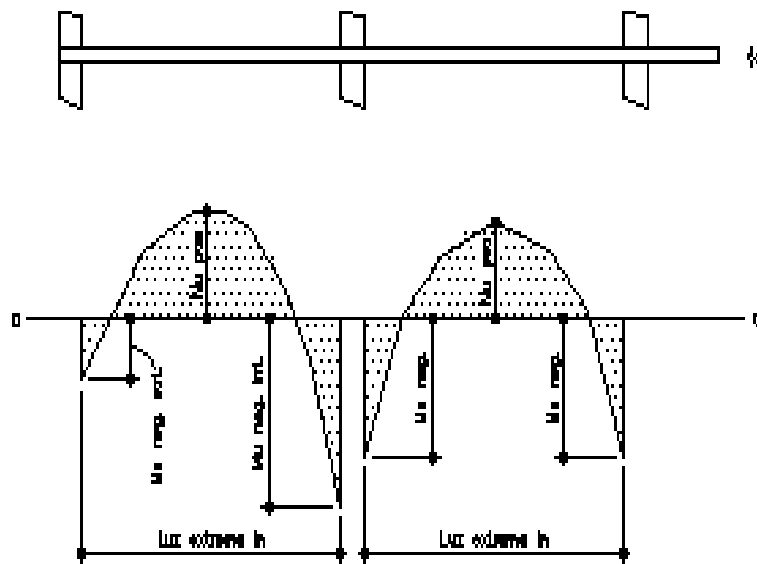


Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilson pagina 386

Para el caso a), el borde exterior no tiene una restricción a momento, como es el caso cuando la losa se apoya en un muro la cual no ofrece ninguna restricción rotacional. El caso b), representa una losa armada en dos direcciones, con vigas en todos los bordes del panel. El caso c), es una placa plana sin vigas. En el caso d), es una placa donde provee una viga a lo largo de sus bordes. El caso e), representa un borde totalmente restringido como, el que se obtiene, cuando la losa es monolítica con un muro muy rígido de concreto reforzado.

A continuación, se representan los coeficientes de este tipo de luces, las cuales se obtuvieron mediante ensayos prácticos, y mediante análisis elásticos tridimensionales modificados, las cuales se encuentran en la (tabla 5 ).

Figura 10 Distribución del momento estático total  $M_0$ , a las secciones críticas para flexión positiva y negativa.



Diseño de estructuras de concreto reforzado ARTHUR Nilsson, pagina 385

TABLA 5 MOMENTO ESTÁTICO MO PARA CALCULAR MOMENTOS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN LUZ EXTREMA

	a	B	c	d	e
	Borde exterior Sin restricción	Losa con viga Entre todos los Apoyos	Losas sin vigas entre todos los apoyos Interiores (sin viga de borde)	Losas sin vigas entre todos los apoyos interiores (con vigas de borde)	Borde exterior totalmente restringido
Momento Negativo Interior	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento Positivo	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Memento Negativo Exterior	0	0.16	0.26	0.30	0.65

sacadas del libro de diseño de estructuras de concreto reforzado, ARTHUR Nilson: 1999 pagina388

Para el caso de los momentos negativos, las cuales pueden ser diferentes en un apoyo adyacentes, se debe diseñar, para el mayor momento negativo, a no ser que se haga un análisis especial con las rigideces relativas, para distribuir el momento no balanceado. Cuando la placa tiene vigas de borde, estas deben diseñarse, para resistir a torsión, la porción del momento negativo exterior.

#### 5.6.4 Distribución lateral de momentos

Después de haber distribuido el  $M_o$  a las secciones críticas, a  $M(-)$ , y  $M(+)$ , posteriormente se debe repartir estos a lo ancho de las secciones críticas, como son las franjas centrales, y las de columnas de cada dirección. Para efectos de diseño, se supone que el momento, es constante entre los límites de cada franja. Pero esto no ocurre, en la franja de columna, debido a la presencia de la viga en este eje, al mismo tiempo toma parte de este momento.

La distribución, de estos momentos, dependen de la relación  $L_2/L_1$ , de la rigidez relativa de la losa y la viga, y el grado de restricción rotacional, que suministra la viga de borde, mediante el parámetro  $\beta_t$ , que mide la restricción relativa proporcionada por la resistencia.

$$\beta_t = \frac{E_{cb} * C}{2 * E_{cs} * I_s} \quad (5.5)$$

$E_{cb}$  y  $E_{cs}$  = módulos elásticos de la losa y viga la cual son iguales

$I_s$  = inercia de la losa, limitada por el ancho entre las líneas centrales de los paneles adyacentes.

$C$  = constante de rigidez torsional de la viga.

$$C = \sum \left( 1 - 0.63 * \frac{X}{Y} \right) * \frac{X^3 * Y}{3} \quad (5.6)$$

“La constante C, se calcula dividiendo, la sección en sus componentes rectangulares, cada una tiene dimensión menor X, y dimensión mayor Y, sumando las contribuciones de todas las partes mediante la ecuación”<sup>14</sup>(5.6).

También, un parámetro que define la rigidez relativa de la viga y de losa que se extiende en cualquiera de las direcciones es:

$$\alpha = \frac{E_{cb} * I_b}{E_{cs} * I_s} \quad (5.7)$$

En donde  $E_{cb}$  y  $E_{cs}$ , son los módulos elásticos de los concretos, las cuales son iguales.

$I_b$ , y  $I_s$ , son las inercias de las vigas y de la losa.

Los subíndices  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , se utiliza para identificar, el valor calculado para las direcciones de L1 y L2.

$I_b$ , se basa en la relación transversal efectiva para la losa.

$I_s$ , se toma igual a  $(b * h^3 / 12)$ , en donde  $b$  es el ancho entre líneas centrales de los paneles a cada lado de la viga.

Una vez definido, esta serie de parámetros, se pueden distribuir los momentos, Los cuales son encontrados, mediante interpolación lineal de la tabla (numero 6), y del (grafico 1), de interpolación. Con esto parámetros, se obtienen los porcentajes de momentos, tanto negativos, coma positivos, que le corresponde a una franja de columna. Y a partir de este, se reparte a las vigas y franjas centrales .Estos momentos, en la franja central, tanto negativo, como positivo

---

<sup>14</sup> Ibid.,p. 385

se obtienen, de la suma de los aportes que le ofrecen las columnas a sus medias franjas centrales , estas a la vez se diseñan para el doble del momento señalado para la media franja central .

Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCION SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 285

Las vigas de borde, deben diseñarse para soportar el 85%, del momento asignado a la franja de columna.

Si  $\alpha L_2/L_1$ , es igual o mayor que uno, para valores entre uno y cero, la proporción que debe resistir la viga, puede determinarse por interpolación lineal .Las cargas aplicadas sobre la viga, deben tenerse en cuenta por separado.

Grafico 1 De interpolación par la obtención de los momentos  
Positivo, negativo interior y negativo exterior

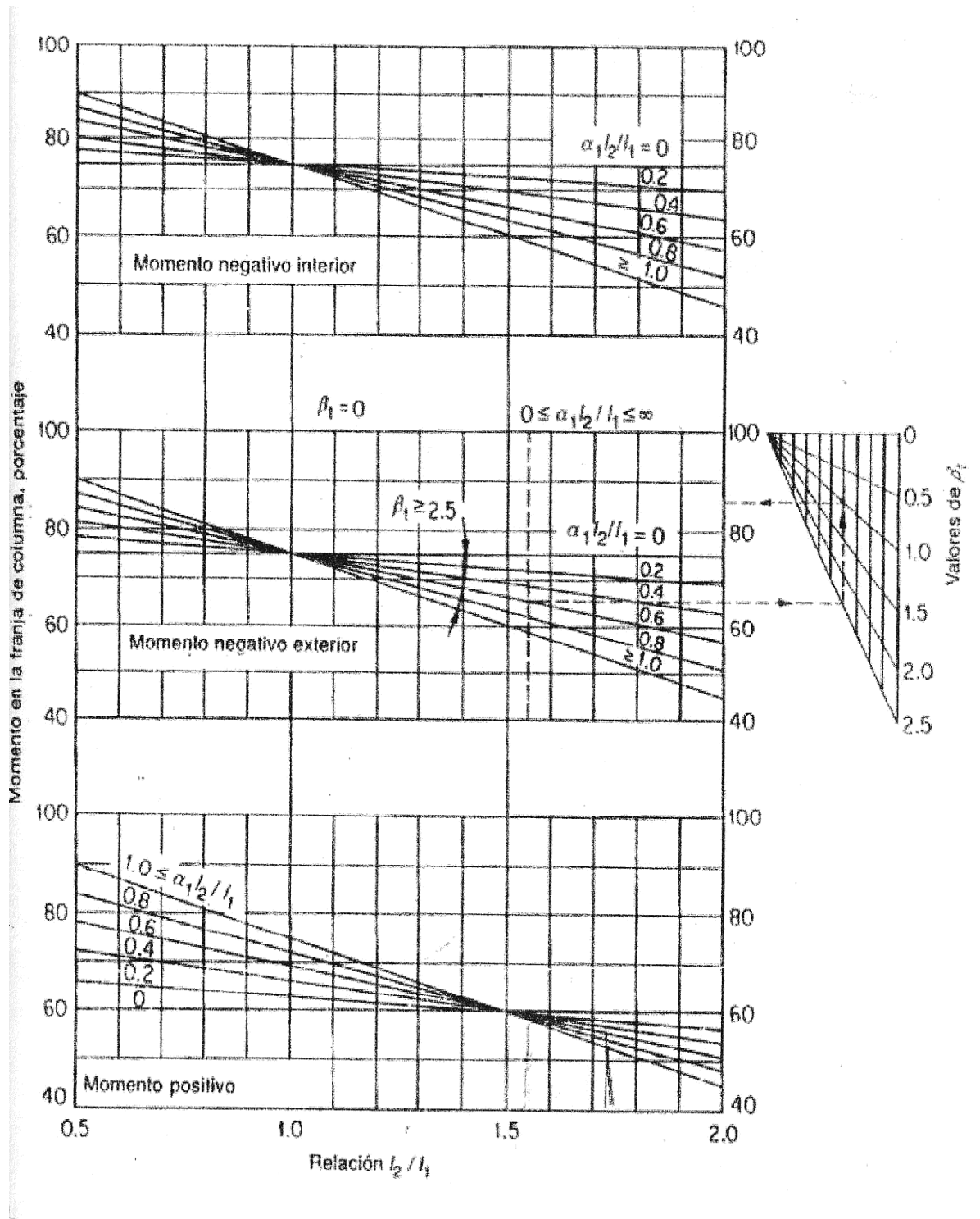


TABLA 6 Momentos en la franja de columna como porcentaje del momento Total en la sección crítica

		L2/L1		
		0,5	1	2
Memento negativo interior $\alpha_i L2/L1 = 0$ $iL2/L1 \geq 1,0$				
		75	75	75
		90	75	45
Memento negativo exterior $\alpha_i L2/L1 = 0$	Bt=0	100	100	100
	Bt $\geq 2,5$	75	75	75
$\alpha_i L2/L1 \geq 1,0$	Bt=0	100	100	100
	Bt $\geq 2,5$	90	75	45
MOMENTO POSITIVO $\alpha_i L2/L1 = 0$ $iL2/L1 \geq 1,0$				
		60	60	60
		90	75	45

Sacadas del libro: Diseño de estructuras de concreto reforzado, ARTHUR Nilson. 1999. pagina 386

#### 5.6.5 Cortantes en sistemas de losas con vigas

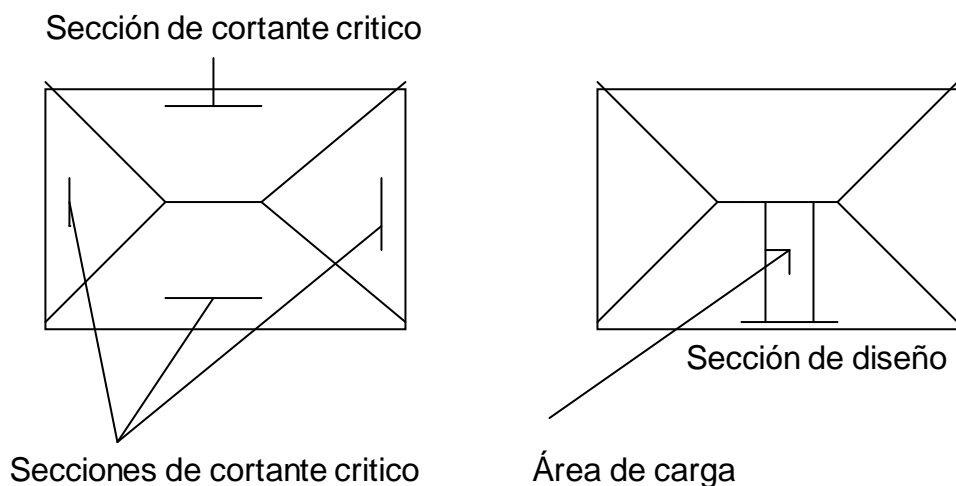
Debe tenerse mucho cuidado, para proporcionar una adecuada resistencia a cortante, al igual que a momento, cuando se diseña por el método directo.

Una parte de la cortante la absorbe la viga, y otra es llevada directamente a las columnas en las cuatros esquinas del panel, cuando el valor de  $\alpha L_2/L_1$ , esta entre uno y cero, y cuando es igual o mayor que uno, deben calcularse las dimensiones, para resistir el cortante producido por las cargas sobre una área tributaria.

Las fuerzas cortantes, que generan las cargas que actúan en triángulos y trapecios (líneas orientadas a 45 grados, a partir de las esquinas), transmiten directamente a las vigas, en las que se sustentan los respetivos triángulos y trapecios.

Las losas, deben estar en capacidad, de resistir las fuerzas cortantes generadas, por este tipo de comportamiento.

Las secciones críticas de la losa, para el diseño a cortante, se ubican en los sectores de ordenada máxima de los triángulos y trapecios, próximos a las vigas de apoyo.



Verificación de cortantes en losas

se debe cumplir que;

$$V_{\text{hormigon}} \geq V_{\text{losa}}$$

$V_{\text{losa}} = 1.00 * \text{seccioncritica} * W$  la cortante es con respecto a la sección crítica

$$V_{\text{losa total}} = \frac{V_{\text{losa}}}{\sigma * bd} \quad V_{\text{hormigon}} = 0.5 * \sqrt{f'c}$$

#### 5.6.6 Límites del espesor del código ACI

El código de edificaciones ACI, ha establecido, que se proporcione para losas en dos direcciones, un control sobre las deflexiones. Estas, a la vez dependen de los espesores mínimos de la losa ya analizados, y tabulados por observaciones sobre estructuras reales. En lo que respecta, deben contrarrestar las deflexiones para las cargas totales.

Existen una serie de criterios, que se interesan analizar al utilizar espesores mínimos menores, en la cual relacionan losas sin vigas interiores (placas y losas planas, con o sin vigas de borde), mientras que para losas con vigas entre apoyos en todos los lados, deben aplicarse ecuaciones límites más complicadas.

TABLA 7 Espesores mínimos, de losas sin vigas interiores.

Esfuerzo de fluencia Fy Lb/pulg <sup>2</sup>	Sin paneles con ábaco			Con paneles con abaci		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde		Sin vigas de borde	Con vigas de borde	
40000	Ln/33	Ln/36	Ln/36	Ln/36	Ln/40	Ln/40
60000	Ln/30	Ln/33	Ln/33	Ln/33	Ln/36	Ln/36

Sacadas del libro : Diseño de estructuras de concreto reforzado ,ARTHUR Nilson. 1999. pagina 393

#### 5.6.7 Losas sin vigas interiores

De acuerdo con el código, el espesor mínimo de losas armadas en dos direcciones sin vigas interiores, no debe ser menor, que el determinado en la (tabla 7). Las vigas de borde, incluidas con el fin de mejorar la transferencia de momentos y cortantes en los apoyos exteriores, aun en el caso de losas armadas en dos direcciones, que de otra manera no tendría vigas, permite una reducción del espesor mínimo aproximadamente del 10 %, para los paneles exteriores. En todos los casos, los espesores mínimos de losas sin vigas interiores, no pueden ser menores que los siguientes valores:<sup>15</sup>

Para losas sin paneles con ábacos 5pulg

Para losas con paneles con ábacos 4pulg

<sup>15</sup> Ibid.,p. 393

### 5.6.8 Losas con vigas en todos los lados

De acuerdo con el código ACI, las losas con o sin vigas que se extienden entre los apoyos en todos los lados de cada uno de los paneles, deben tener un espesor mínimo no menor que:

$$h = \frac{L_n * \left( 0.8 + \frac{f_y}{200} \right)}{36 + 5 * \beta * \left( \alpha_m - 0.21 * \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \right)} \quad (5.8)$$

y no menor que:

$$h = \frac{L_n * \left( 0.8 + \frac{f_y}{200} \right)}{36 + 9 * \beta} \quad (5.9)$$

sin embargo el espesor necesita no debe ser mayor que:

$$h = \frac{L_n * \left( 0.8 + \frac{f_y}{200} \right)}{36} \quad (5.10)$$

Donde:

$L_n$  = luz libre en dirección larga

$\alpha_m$  = valor promedio de  $\alpha$ , para todas las vigas de los bordes de un panel.

$\beta$  = relación, entre la luz libre en dirección larga, y la luz libre en la corta.

(Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 285

#### 5.6.9 Momentos mayorados en vigas.

Las vigas, entre apoyos deben dimensionarse, para resistir el 85%, de los momentos de la franja de columna si  $(\alpha L_2/L_1)$ , es igual o mayor que 1.0.

Para valores de  $(\alpha L_2/L_1)$ , entre (1.0 y 0), la proporción de los momentos de la franja de columna resistidas por las vigas, se obtiene por interpolación lineal, entre 85% y 0%.

Además, de los momentos calculados, las vigas deben dimensionarse, para resistir los momentos causados por las cargas aplicadas directamente sobre ellas, incluyendo el peso de la porción de la viga que no esta embebida en la losa.

#### 5.6.10 Momentos mayorados en las franjas centrales

“Aquella porción, de los momentos mayorados negativos y positivos, no resistida por las franjas de columna, debe asignarse proporcionalmente, a las medias franjas centrales correspondientes”.<sup>16</sup>

---

<sup>16</sup> NORMAS COLOMBIANAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCION SISMORRESISTENTE NSR-98TOMO I :Cargaphies S . A. P285

“Cada franja central, debe dimensionarse, para resistir la suma de los momentos asignados a sus medias franjas centrales”.

“Una franja central, adyacente y paralela a un borde en un muro, debe dimensionarse, para resistir el doble del momento asignado a la media franja central correspondiente a la primera fila de apoyos interiores.”

#### 5.6.11 Refuerzo a flexión

El refuerzo a flexión, para sistemas de losas en dos direcciones, debe determinarse, de acuerdo a los momentos de diseño, calculados para las secciones críticas en forma de malla ortogonal , unas barras paralelas a cada lado del panel , pero este no debe ser menor que la requerida.

El espaciamiento máximo, para estas barras en estas secciones, no deben exceder, de dos veces el espesor de la losa, para absorber las posibles cargas concentradas locales, y asegurar que las grietas de tensión sean angostas y estén bien distribuidas .

En algunos casos, se utilizan barras rectas, aunque algunas veces, el acero para momento positivo cuando ya no se necesita, se dobla hacia arriba para proveer el negativo.

El espaciamiento entre barras, es de dos veces el espesor de la losa. No se aplica para losas nervadas, las cuales se apoyan en unos aligeramientos, y que deben cumplir los requisitos para retracción y temperatura, para absorber los

esfuerzos generados por compresión, y permitir un control eficiente de la figuración, la cual se puede utilizar, la malla electrosoldada, en la cual las solicitaciones de diseño, se especifica su esfuerzo de fluencia, el diámetro, y el espaciamiento de cada celda.

Por lo general, esta loseta de compresión, es monolítica con las nervaduras y es del orden de cinco centímetros, la cual dicha malla se debe colocar a media altura.

Además, de esta capa o loseta de compresión, debe ser capas de soportar una carga mínima concentrada de 1000 Kg, en una área de 10\*10 cm, aplicada a la posición mas desfavorable. Es necesario también, que en cada entre eje, y en cada dirección, se tenga por lo menos seis hileras de casetones donde la distancia de centro a centro de nervaduras será como máximo de un sexto del claro de la losa paralela a la dirección en que se mide la separación de las nervaduras<sup>17</sup>.

Debe mantenerse un recubrimiento de concreto de  $\frac{3}{4}$  de pulgada. El refuerzo negativo, para los bordes no continuos se considera el momento negativo, como un tercio del momento positivo. El refuerzo, así colocado solucionara la posible restricción posible en estos bordes.

Para placas planas, y losas planas, cuando el refuerzo se coloca en doble capa perpendicular, tanto a la franja central para M(+), y en la franja de columna

---

<sup>17</sup> ALAMA, Op. Cit., p. 172

para  $M(-)$ , el refuerzo interior tendrá una altura efectiva menor, que en la exterior en un diámetro de barra .

Cuando la losa, esta apoyada en vigas en todos los bordes, este problema de doble capa de refuerzo, la cual se da en la franja central para  $M(+)$ , y en la franja de columna, y en especial las vigas quien soportan la mayor parte de la carga en la franja de columna en la cual son muy pequeñas en especial en sus intercepciones.

Para este caso, de losas apoyadas sobre vigas, para el refuerzo de  $M(+)$  perpendicular a un borde discontinuo, debe extenderse hasta el borde de la losa y tener allí un anclaje recto o de ganchos de por lo menos 150 mm .

Para el refuerzo negativo, perpendicular a este borde, debe anclarse en las vigas, columnas o muros para obtener en la cara del apoyo una longitud de desarrollo .

Cuando la losa, se apoya en algunos de estos elementos, o cuando la losa quede en voladizo mas aya del apoyo , el refuerzo debe anclarse dentro de loa losa .

(Resumen de la NSR-98 NORMAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCION SISMORRESISTENTE Capitulo C.13 Pagina 282)

Las aberturas, para el refuerzo en la losa sin vigas, puede disponerse de cualquier tamaño, si el análisis demuestra que la resistencia proporcionada es

por lo menos la requerida, si cumplen todas las condiciones de servicio incluyendo los límites especificados para las deflexiones.

Para paneles rectangulares, apoyadas sobre vigas rígidas, o muros, la altura efectiva exterior será para el mayor momento generado, que en este caso es de la luz corta, que es quien recibe la mayor parte de la carga, y la altura efectiva interior para la luz larga.

Para losas y placas planas, estos efectos no son así de sencillos. Para el caso, de placas planas, en donde todo el panel incluyendo tanto las franjas centrales como las de columnas en cada dirección, los momentos en la dirección larga, serán mayores que en la corta. Para confirmar fácilmente, se podría calcular el  $M_0$ , en cada dirección. Este a la vez, se reparte a las secciones de  $M(-)$ ,  $M(+)$  y luego lateralmente a las franjas de columnas y las centrales .

Los momentos (+), de la franja central, son mayores en la dirección larga, que en la corta. En losas planas y en losas con vigas rígidas, es lo contrario, para las franjas de columnas los momentos (+), y momentos (-), son mayores en la dirección larga, que en la corta. Con base a esto, se debe siempre colocar barras en la dirección larga, tanto para franjas centrales, como las de columnas, con una mayor altura efectiva o más cercana a a la superficie superior e inferior.

A medida, que aumenta la rigidez de la viga progresivamente en el eje de columnas, el valor del momento en la dirección corta, predomina sobre la larga a lo larga de los ejes, pero no ocurre en la viga en si.

El parámetro, indispensable para la colocación de refuerzo, depende de las magnitudes relativas de los momentos de diseño, obtenidos para un determinado panel, según las condiciones de restricción de borde las cuales pueden ser: de esquina, interiores, y exteriores, además de sus relaciones geométricas, con el valor máximo ( $d$ ), suministrando a las barras mayor resistencia a momento .

El código ACI, establece, que la franja de columna en las dos direcciones, las barras inferiores deben ser continuas, o lleguen a los apoyos con un empalme clase A, o se anclen dentro del apoyo. Estas barras tienen como objeto preservar algún grado de integridad estructural, para absorber los daños causados por una falla a cortante, por punzamiento local de la losa.

Las barras deben atravesar las columnas, y colocarse dentro el núcleo de estas.

Para el cálculo de los nervios, en una losa nervada, se realiza como una viga simplemente apoyada, teniendo en cuenta la cuantía de refuerzo requerida, y el momento de diseño, será el producto del momento total de la redistribución de los momentos (+), y (-), a las secciones críticas, como son; franja de columna, y franjas centrales en cada dirección.

Después de calculados los momentos en las secciones críticas, y que por lo cierto son constantes en todo el ancho de la franja, se reparte a los nervios contenidos en tal franja, para obtener así, el momento de diseño por nervio y por último el refuerzo requerido.

Para el caso de losas macizas, el momento de diseño será el calculado originalmente.

Para el método de los coeficientes, se calcula primero, para la franja central partiendo de la carga  $W$  total, al obtener así un momento  $M_o$ , en cada una de las direcciones, al dividir este momento por el número de nervios, se obtiene el momento de diseño que le corresponde a cada nervio. Esta se debe, a que el momento calculado, es constante a lo largo de los bordes de la franja de la losa. Para obtener los momentos en las franjas de columnas, estos se reducen inicialmente, de su valor total  $M_a$ , o  $M_b$ , en el límite de la franja central, a  $1/3$  de estos valores en el borde del panel. El refuerzo se coloca para un momento promedio de  $2/3$  del correspondiente a las franjas centrales, y de estos llevados a los diferentes nervios.

Para el caso de losas macizas, es la misma metodología empleada, el espaciamiento del refuerzo para la franja de columna, será para un momento promedio de  $2/3$  correspondiente a la franja central. Por lo tanto el área de refuerzo será de  $2/3$  de la colocada en la franja central, y para las barras del mismo diámetro, el espaciamiento será de  $3/2$  del utilizado en la franja central, siempre en cuando no exceda el límite de espaciamiento de armadura mínima.

Hay que tener en cuenta, la necesidad de un refuerzo adicional, en las esquinas exteriores para losas macizas con vigas entre apoyos, cuyo valor de  $\alpha$  sea mayor que uno. Este refuerzo debe proporcionarse en la parte superior e inferior en dichas esquinas, para resistir un momento igual al máximo momento positivo de la losa (por unidad de ancho), y espaciamiento similar del refuerzo para ese mismo momento positivo.

El refuerzo, debe colocarse a una distancia de  $1/5$  de la luz mayor en ambas direcciones, a partir de las esquinas de acuerdo con el momento, que actúa

alrededor de un eje perpendicular a la diagonal desde la esquina en la parte superior de la losa y perpendicular a esa diagonal en la parte inferior.

El refuerzo superior debe ser paralelo a la diagonal desde la esquina y el refuerzo inferior perpendicular a la diagonal. Estos dos tipos de refuerzo se pueden colocar en dos capas paralelas en los lados de la losa que se localizan en la parte superior e inferior de la losa

## 5.7 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

### 5.7.1 Introducción

El método, de los elementos finitos, ha adquirido gran importancia en la solución de problemas de toda índole, en donde se requieren de procedimientos matemáticos muy complejos, o imposibles de resolver.

Este método, en especial en el campo de la ingeniería, permite resolver estos problemas de una manera mas rápida, que a diferencia de años atrás donde no existía este método, se realizaban prototipos de algún modelo para luego ser ensayados, trayendo consigo gastos de tiempo y economía . El método de los elementos finitos, aunque trae muchas ventajas es un método aproximado de cálculo.

El método de los elementos finitos, como formulación matemática, es relativamente nuevo, aunque su estructura básica es conocida desde hace muchos años. Este método, se ha desarrollado más y más, gracias al avance

tecnológico en la parte informática, lo que ha puesto a disposición de los usuarios, gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con los elementos finitos. Pero para un buen manejo de este programa, exige un conocimiento más a fondo, sobre los principios de este método. Solo en este caso, estaremos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en el análisis se ajustan a la realidad.

#### 5.7.2 Método de los elementos finitos aplicados a placas

La técnica de los elementos finitos, constituye un enfoque numérico muy diferente en los problemas de análisis de placas. En este método, la placa se divide en un número de áreas o elementos rectangulares, triangulares o cuadriláteros.

Cada elemento pequeño de la placa, posee propiedades de deformación por flexión, las que se conocen o se pueden aproximar con bastante exactitud. El método general del análisis, consiste en concentrar las cargas en las esquinas o nudos de los elementos separados, y luego reestablecer la continuidad de la pendiente y deflexión en cada punto del nudo y también a veces, en puntos intermedios, para cumplir con los requerimientos de equilibrio y las condiciones de frontera.

El método de los elementos finitos, es un avance importante en el campo del conocimiento, como es el caso elementos de placas sujetos a flexión.

La selección de la forma del elemento, sus características particulares de deformación, la orientación de los elementos y el número de estos influyen en los resultados finales de la solución. En consecuencia, cualquier estudio de

placas que utilice este método incluye una cierta cantidad de experimentación con estos factores, y deben alcanzar un ajuste sustancial con soluciones conocidas antes de trabajar con las nuevas soluciones, También son importantes las comparaciones con los valores necesarios, por el equilibrio estático, ya que no se tiene garantía alguna de que se satisfará la estática. En algunos casos, el equilibrio estático puede representar un problema importante.

Una vez que se haya seleccionado el tipo de elemento y la distribución básica de los elementos, queda todavía por decidir el número de estos. Como en el caso de las diferencias finitas, sucede que en general, mientras mas fina sea la retícula mejor será el resultado obtenido, pero mayor será el costo en términos de tiempo de cálculo. Los arreglos con los elementos pequeños en las zonas de altos gradientes de momentos y los elementos mayores en otras áreas mejoran la solución pero con un razonable esfuerzo de calculo. El tamaño óptimo del elemento y a la óptima combinación de los elementos de diferentes tamaños se hallara por experimentación.

La técnica de las diferencias finitas, se usa en algunos casos para hallar las propiedades de deformación requeridas, de los varios elementos finitos de manera, que se deben considerar los métodos como complementarios.

El método de los elementos finitos, se puede llevar hasta el intervalo inelástico, siguiendo diversas técnicas. Por ejemplo, se utilizo la técnica de los elementos finitos para incluir los efectos del agrietamiento por flexión y tubo éxito al predecir las deflexiones a corto plazo en pisos de losas del tipo de placas planas, con cargas que llevan aproximadamente hasta el inicio de la fluencia del refuerzo .Scalon, y Escalón y Murria han usado técnicas de elementos

finitos para predecir deflexiones y cambios en los esfuerzos en las losas que dependen del tiempo.

La técnica de los elementos finitos, puede aceptar casi cualquier condición de frontera, usando procedimientos relativamente simples. Por lo que es una poderosa herramienta de análisis. Por ejemplo las losas apoyadas en vigas y columnas que tienen rigidez infinita flexionante, han sido estudiadas por Jofrie y McNeicey Pfaffinger.

Por consiguiente, el método será la alternativa lógica para el análisis de sistemas complejos de losas.

## 6 .DISEÑO METODOLÓGICO

El desarrollo de esta etapa del trabajo, comenzó con la consulta de todo el material bibliográfico correspondiente a losas en dos direcciones, discriminándola en los diferentes temas como son; el análisis, el cálculo y el diseño de este tipo de losas.

Algunos de estos temas, se extrajeron por medios electrónicos, y escritos como libros.

Luego se procedió, al análisis de la información, y posterior selección de los temas de mayor trascendencia.

Durante todo el tiempo en que se desarrollo el trabajo. El estudiante, tuvo el acompañamiento del asesor temático, quien dio las pautas a seguir y las diferentes actividades a realizar.

Luego de haber estudiado y asimilado el tema, el estudiante, procedió a realizar las siguientes actividades:

\* ejemplo, de modelo de losa para el entendimiento de las ecuaciones en que se basan los diferentes métodos.

\* Montaje de una losa típica aligerada, que cumpla los requisitos de una losa en dos direcciones.

\* calculo de la losa por los métodos: coeficientes, directo, con la ayuda de hojas de calculo, y de los elementos finitos mediante modelación en el programa sap-2000

\* Realizar el análisis comparativo, de los resultados arrojados por los diferentes métodos.

## 7. DESARROLLO METODOLÓGICO

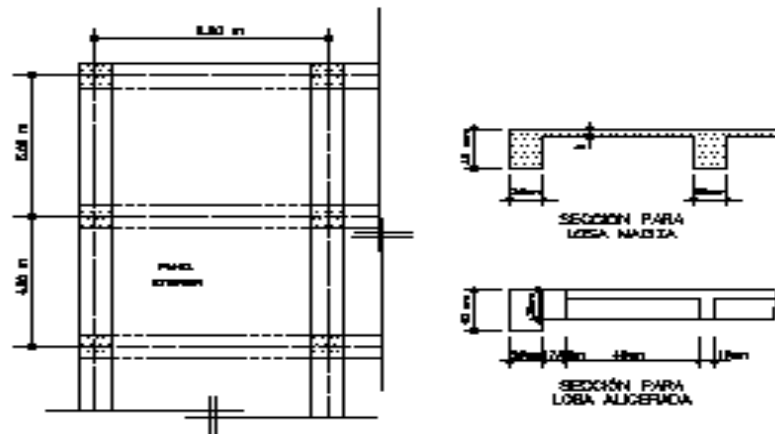
Para el desarrollo, y análisis del sistema de losas en dos direcciones, en esta etapa del proyecto, la cual se subdivide en varias etapas que comprende, como primer punto, mostrar de una manera clara, las ecuaciones que son objeto de estudio del sistema de losas, mediante un ejemplo, de un panel exterior de una losa típica analizada por el método de los coeficientes y directo tanto maciza como aligerada.

En primer instancia, se va plantear este ejemplo con todos sus datos, incluyendo el esquema del panel con toda su geometría, posteriormente su solución, definiendo desde el principio el método a utilizar, y el tipo de losa a analizar (maciza o aligerada), como también los pasos a seguir en su desarrollo en forma ordenada y explicando paso a paso cada uno de ellos. Además de las ecuaciones utilizadas, y obtener así un análisis completo por las dos metodologías y para los dos sistemas de losas, como paso para comprender mejor el ejemplo de aplicación, que es aplicando mediante la ayuda de hojas de calculo, para un ejemplo de una losa común, con varios tipos de paneles, utilizando los métodos de los coeficientes y directo, como también entender el análisis arrojado por la modelación por elementos finitos en el programa sap – 2000. Esta losa común, será aplicada para las dos metodologías como losas aligerada, que es la mas utilizada en el medio. Al final se confrontaran los resultados del análisis estructural de todas las metodologías, y establecer así sus diferencias y poder de análisis en el campo estructural.

El desarrollo de estos puntos, se irán explicando paso a paso a medida que se avanza en el desarrollo metodológica

7.1 EJEMPLO DE CALCULO DE UN PANEL EXTERIOR, MACIZA Y ALIGERADA, PARA VISUALIZAR MEJOR EL EMPLEO DE LAS ECUACIONES POR EL MÉTODO DIRECTO, Y DE LOS COEFICIENTES

Figura 12 Panel exterior perteneciente a una losa de entrepiso



Un sistema de piso, Armada en dos direcciones, para un edificio de concreto reforzado para vivienda unifamiliar, como muestra la (figura 12), y cuyos datos se representan en los datos de entrada. Se deben hacer los cálculos de los momentos, tanto por el método directo, y de los coeficientes como: losa maciza, y aligerada. Los paneles adyacentes, al panel a analizar en la parte superior e inferior, tiene una luz de 5.00 m en la dirección (Y), y en su parte derecha, dirección (X), un panel con una luz de 5.00 m.

### DATOS DE ENTRADA

Resistencia a la compresión del concreto	f'c=	210	Kg /cm <sup>2</sup>
Resistencia a la fluencia del acero	Fy =	4200	Kg /cm <sup>2</sup>
Dimensiones del panel a analizar según la dirección	X=	5.00	m
	Y=	4.00	m
Dimensiones de la viga de borde	B=	0.25	m
	H=	0.40	m

#### 7.1.1 solución por el método directo, losa maciza

Como un primera alternativa, para la elección del espesor mínimo de la losa, podríamos tomar un valor tentativo de 15 cm, y evaluamos sus requerimientos de acuerdo a los espesores mínimos:

De acuerdo, con el código ACI, las losas con o sin vigas que se extienden entre todos los apoyos de cada uno de los paneles, deben tener un espesor mínimo no menor que:

$$h_{\min} = \frac{Ln\left(0.8 + \frac{fy}{200000}\right)}{\left(36 + 5 * \beta * \left(\infty m - 0.12 * \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)\right)}$$

Los parámetros  $L_n$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_m$  son respectivamente:

$L_n$ =longitud luz larga, del panel medido de caras de, vigas en pulgadas

$$L_n = 4.75 * \left( \frac{1 \text{ pulg}}{0.0254 \text{ m}} \right) = 187 \text{ pulg}$$

$\beta$ =relación entre la luz libre en dirección larga, y la luz libre en la corta

$$\beta = 4.75 / 3.75 = 1.26$$

$\alpha_m$ = valor promedio de  $\alpha$ , para todas las vigas en los bordes de un panel

$$\alpha_{\text{exterior luz corta}} = \frac{I_{\text{VIGADEBORDE}}}{I_{\text{LOSA}}}$$

$$I_{\text{viga}} = \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_{\text{losa}} = \frac{l_2 * h^3}{12}$$

$L_2$ =longitud de centro a centro de paneles adyacentes

$$\alpha_{\text{exte en y}} = \frac{\frac{0.25 \text{ m} * (0.4 \text{ m})^3}{12}}{\frac{.625 \text{ m} * (0.15 \text{ m})^3}{12}} = \frac{0.00133 \text{ m}^4}{0.00074 \text{ m}^4} = 1.8$$

$\alpha$  interio en Y:

$$\alpha_{\text{int}} = \frac{\frac{0.25m * (0.4m)^3}{12}}{\frac{5m * (0.15m)^3}{12}} = \frac{0.00133m^4}{0.0014m^4} = 0.94$$

$\alpha$  superior luz larga =  $\alpha$  inferior luz larga, ya que las luces de los paneles adyacentes son iguales.

$$\alpha_{\text{superior}} = \alpha_{\text{interior}} = \frac{\frac{0.25m * (0.4m)^3}{12}}{\frac{4.5m * (0.15)^3}{12}} = \frac{0.00133m^4}{0.00126m^4} = 1.05$$

$$\alpha_m = \frac{1.8 + 0.94 + 1.05 + 1.05}{4} = 1.21$$

Ya conocidos los parámetros, procedemos a reemplazar en las diferentes ecuaciones:

Antes de reemplazar, los valores en las ecuaciones, debemos convertir,  $F_y = 4200 \text{Kg/cm}^2$ , a unidades de  $\text{lib/pulg}^2$ , ya que las ecuaciones son consistentes con estas unidades.

$$F_y = (4200 \text{Kg/cm}^2) * (2.2 \text{lib/1Kg}) * (2.54 \text{cm})^2 / (1 \text{pul}^2) = 60000 \text{ lib/pulg}^2$$

$$H_{\text{min}} = \frac{Ln(0.8 + f_y / 200000)}{36 + 5 * \beta * (\alpha_m - 0.12 * (1 + 1/\beta))}$$

$$H_{\min} = \frac{187 \text{ pulg} * \left( 0.8 + \frac{60000 \text{ lib} / \text{ pulg}^2}{200000} \right)}{36 + 5 * 1.26 * (1.21 - 0.12 * \left( 1 + \frac{1}{1.26} \right))} = 4.86 \text{ cm}$$

H<sub>min</sub>=12.34pulg aproximadamente

Sin embargo, el espesor minino no debe ser menor que el determinado por la actuación:

$$H = L \ln \left( \frac{0.8 + \frac{fy}{200000}}{36 + 9 * \beta} \right)$$

$$H = \frac{187 \text{ pulg} * \left( 0.8 + \frac{60000 \text{ lib} / \text{ pul}^2}{200000} \right)}{36 + 9 * 1.26} = 4.34 \text{ pulg}$$

H=11.036 cm aproximadamente

Y el limite, necesita no ser mayor que que el valor de la ecuación.

El valor limite, es de 3.5pulg aproximadamente 8.89 cm ya que  $\alpha_m \geq 2.0$  ,  
 $4.1 \geq 2.0$ .

$$H = \frac{L \ln(0.8 + fy / 200000)}{36}$$

$$H = \frac{187 \text{ pulg} * \left( 0.8 + \frac{60000 \text{ lib} / \text{ pulg}^2}{200000} \right)}{36} = 5.71 \text{ pulg}$$

H=14.51 cm

Se verifica que  $h=15 \text{ cm} > 12.84 \text{ cm}$

Entonces el valor de  $h$  seleccionado es el apropiado

### CALCULO DE LAS CARGAS

- Peso propio de la losa  $= 0.15 \text{ m} \cdot 24 \text{ KN/m}^3 = 3.6 \text{ KN/m}^2$
- Alistado y desniveles  $= 0.04 \text{ m} \cdot 22 \text{ KN/m}^3 = 0.88 \text{ KN/m}^2$
- Afinado y cielo raso  $= 0.02 \text{ m} \cdot 22 \text{ KN/m}^3 = 0.44 \text{ KN/m}^2$
- Cargas muros divisorios  $= 3.4 \text{ KN/m}^2$

Carga muerta total  $= 8.32 \text{ KN/m}^2$

Carga viva  $= 1.8 \text{ KN/m}^2$ . Por ser vivienda unifamiliar

$W = 1.4 \cdot 8.32 \text{ KN/m}^2 + 1.7 \cdot 1.8 \text{ KN/m}^2 = 14.71 \text{ KN/m}^2$

Para la dirección luz corta, considerando la franja de losa y viga centrada en el eje interior de columnas el momento estático total de diseño es:

$$M_o = \frac{(2.5 \text{ m} \cdot (3.75 \text{ m})^2 \cdot 14.71 \text{ KN/m}^2)}{8} \quad M_o = 64.64 \text{ KNm}$$

Este se distribuye de la siguiente manera:

Momento negativo de diseño  $= 64.64 \text{ KNm} \cdot 0.65 = 42 \text{ KNm}$

Momento positivo de diseño  $= 64.64 \text{ KNm} \cdot 0.35 = 22.62 \text{ KNm}$

Los valores de 0.65 y 0.35, corresponden a los porcentajes que le corresponde, al momento positivo y negativo respectivamente para luces, exterior e interior

La franja de columna tiene un ancho de  $(5/4)+(4/4)$ , ósea un cuarto de la longitud de los paneles adyacentes.

Con  $L2/L1=5m/4m=1.25$  y  $\alpha L2/L1=0.94$

En donde  $\alpha$ , corresponde a la analizada en la dirección corta, y para la franja interior.

$L2/L1=$  relación entre la luz no analizada y la analizada

$\alpha L2/L1=0.94*1.25=1.175$

De la (grafica 1) de interpolación, o de la (tabla 6), (momentos en la franja de columna, como porcentaje del momento total, en la sección critica para momento positivo y negativo interior). Esta ultima se puede interpolar, entrando con los valores  $\alpha L2/L1$ , y  $L2/L1$ , para a si conocer los porcentajes, correspondientes a cada uno de los momentos.

Para este caso, utilizaremos el grafico de interpolación, para realizar esta actividad.

1) Se entra en su parte inferior, con el valor de  $L2/L1=1.25$ , quien va en una escala horizontal, desde 0.5 hasta 2.0, posteriormente, se sube con este valor hasta cortar la grafica de momentos negativos exterior en el valor de  $\alpha L2/L1$  correspondiente, que en este caso vale 1.17. Con este valor se sigue en forma horizontal hacia su derecha, y se lee el porcentaje que le corresponde a la franja de columna, del momento negativo exterior que es igual a 68%, y asi sucesivamente, para el momento positivo, la cual dio 68 %. Con estos valores se reparten a las vigas, franjas de columna, y franjas centrales.

Por ejemplo, para el primer valor negativo en la franja de columna interior, esta toma el 68 %, de este momento =28 KNm, las vigas toman el 85 % =24.28 KNm, que sale de multiplicar  $28 \cdot 0.85$ , pero cuando  $\alpha L_2/L_1 \leq 1$ , cuando este valor esta entre (1 y 0), el % que toma la viga, se haya por interpolación lineal entre 0 y 85%.

La losa toma el restante, osea  $28.56 \text{ KNm} - 24.28 \text{ KNm} = 4.28 \text{ KNm}$ , y la franja central, toma el restante  $42 \text{ KNm} - 24.28 \text{ KNm} - 4.28 \text{ KNm} = 13.44 \text{ KNm}$ .

De igual manera se realiza para el momento positivo .

Un análisis similar, se hace para la franja exterior, pero hay que tener en cuenta los parámetros  $\alpha$  y por consiguiente  $\alpha L_2/L_1$ . Además del valor de  $M_0$ , porque este ya no toma un área aferente igual a la distancia de ejes centrales de los paneles adyacentes, si no que toma la media franja de columna que corresponde a dicho borde.

$\alpha$  es el valor hallado, anteriormente, que es la misma dirección corta, pero ya en la franja exterior, cuyo valor es igual a 1.80,  $L_2/L_1$  no varia,  $\alpha L_2/L_1 = 1.8 \cdot 1.25 = 2.25$ , en donde el momento es:

$$M_0 = \frac{2.625m \cdot (3.75m)^2 \cdot 14.71 \text{KN} / m^2}{8} = 67.87 \text{ KNm}$$

de los cuales:

$$M(\text{negativo}) = 0.65 \cdot 67.87 \text{ KNm} = 44.12 \text{ KNm}$$

$$M(\text{positivo}) = 0.35 \cdot 67.85 \text{ KNm} = 23.74 \text{ KNm}$$

Posteriormente, después de haber realizado los cálculos anteriores resulta la tabla que sigue a continuación:

Tabla 8 Resultados del análisis en la dirección Y, para cada una de las secciones críticas de diseño, del panel exterior, y losa maciza, método directo.

	Momento en la viga (KNm)	Momento en la franja de columna en la losa (KNm)	Momento en la franja central de la losa (KNm)
Franja interior luz de 4m			
Momento negativo	24.28	4.28	13.45
Momento positivo	13.07	2.3	7.24
Franja exterior luz de 4 m			
Momento negativo	25.5	4.5	14.12
Momento positivo	13.7	2.42	7.63

Para el análisis en la dirección larga, también se obtienen unos porcentajes, la cual toma la franja de columna, pero con la diferencia de que ya existen tanto los momentos negativos interiores, exteriores y positivos, por estar en el caso de luz extrema. Adicionalmente, para el cálculo del porcentaje de momento negativo exterior, aparece un parámetro llamado  $\beta_t$ , que es la restricción relativa proporcionada por la resistencia torsional de la viga de borde transversal. A la vez de los parámetros  $L_2/L_1$ , y  $\alpha L_2/L_1$ , calculados de manera similar, pero teniendo en cuenta de que la relación  $L_2/L_1$ , ya va hacer lo

contrario, Luz menor/Luz mayor y  $\alpha$ , los calculados anteriormente en las direcciones correspondientes en este caso X, o luz menor

También, cabe anotar, que el momento estático, o de diseño tanto para momento negativo exterior, positivo y negativo interior, debe multiplicarse por su respectivo porcentaje que le corresponde de dicho momento. Estos son aportados por la (tabla 5), para distribuirlos a partir de  $M_o$ .

Para calcular estos momentos para luz extrema, cuyos valores son :  
 $M(-)$ exterior=0.16,  $M(+)$ =0.57,  $M(-)$ interior=0.7 respectivamente.

Estos factores se sacan de la( tabla 5), la cual significa que la losa esta apoyada por vigas en todos los bordes.

Desarrollando, a si cada uno de los puntos anteriores obtenemos:

$$C = \sum (1 - 0.63 * X/Y) * \frac{X^3 * Y}{3}$$

En donde

X=Altura de la losa

Y= es la proyección efectiva, del ala mas aya de la cara del alma de la viga ,  
es la menor de  $4h_f$  o  $h-h_f$ , en donde:

h=altura de la viga

$h_f$ =altura de la losa que en este caso es igual a 0.25 m

$4 * 0.15m = 0.6m > (0.4m - 0.15m) = 0.25m$ .

Reemplazando, estos valores en las respectivas formulas tenemos:

$$C = \left(1 - 0.63 * \frac{0.25m}{0.40m}\right) * \frac{(0.25m)^3 * 0.40m}{3} + \left(1 - 0.63 * \frac{0.15m}{0.25m}\right) * (0.15m)^3 *$$

$$\frac{*0.25m}{3} = 0.001437$$

$$L2/L1 = 4m/5m = 0.8 \quad \alpha L2/L1 = 1.05 * 0.8 = 0.84$$

$$\beta t = \frac{C}{2 * I_{losa}}$$

I = inercia de la losa en esa dirección

$$\beta t = \frac{0.001437m^4}{2 * \frac{(4.5m * (0.15m^3))}{12}} = 0.56$$

Con estos valores, procedemos como en el primer caso, luz corta, partiendo de la lectura en el grafico de interpolación partiendo de  $L2/L1=0.8$ , subimos hacia arriba hasta cortar  $\alpha L2/L1=0.84$ , y para el caso de momento negativo exterior aparece un nuevo grafico para el valor de  $\beta t$ , en donde después de haber leydo  $\alpha L2/L1$ , nos orientamos en forma horizontal hasta cortar esta grafica, en donde subimos verticalmente hasta cortar el valor de  $\beta t$ , que varia entre 0 y 2.5, apartir de aquí nos devolvemos en forma horizontal, y leemos en la grafica de  $M(-)$  exterior, el porcentaje que le corresponde, que en este caso es de un 94%.

Para los demás momentos, tanto positivo como negativo interior, se entra en la grafica con  $L2/L1$  y  $\alpha L2/L1$ , y se lee en forma similar que en el caso de luz interior .

Obtenidos los valores antes mencionados, y después de calcular el momento para la distribución.

$$M_o = (4.75m)^2 * 2m * 14.71KNm / 8 = 82.97 \text{ KNm}$$

Se distribuye, de igual manera que los ejemplos anteriores, teniendo en cuenta que se reparte a partir del valor de  $M_o$ , multiplicando por sus respectivos factores 0.16, 0.57 y 0.7 respectivamente.

Además, del valor en porcentaje que le corresponde a la viga, ya no es al 85 %, si no que se debe hallar por interpolación lineal, ya que  $\alpha L2/L1$ , es menor que uno. En la tabla siguiente, se resume los resultados:

Tabla 9 Resultados del análisis en la dirección X, del panel exterior, para cada una de las secciones criticas de diseño, para losa maciza, método directo.

	Momento en la viga (KNm)	Momento en la franja de columna de la losa (KNm)	Momento en la franja central (KNm)
Negativo exter luz 5m	8.9	3.56	0.81
Positivo luz 5m	26.33	10.55	10.4
Negativo Inter. Luz 5m	33.17	13.28	11.62

### 7.1.2 solución por el método de los coeficientes losa maciza

Paso 1 cálculo del espesor de la losa

$$T = \frac{\text{perimetrolibredelpanel}}{180} \geq 0.09m$$

$$T = \frac{2 * (4.75m + 3.75m)}{180} = 0.094 \geq 0.09m$$

T aproximadamente=0.10 m.

Otra forma de hallar el espesor mínimo, se halla de la (tabla 7), de losas sin vigas interiores. Se podrá tomar  $L_n/36$ , ya que se trata de un panel exterior con ábacos y vigas de borde .Además que  $f_y=420$  MPA.

$T=L_n/36$   $L_n$ =luz libre en la longitud larga

$$T = \frac{4.75m}{36} = 0.13m$$

El valor escogido de T, podría tomarse  $T=0.15$  m.

Para este ejercicio, se tomaran las cargas del ejemplo anterior  $W=14.71$  KN/m<sup>2</sup>.

Paso 2 Determinación de los momentos en la franja central

Utilizando el procedimiento, de losas en dos direcciones apoyadas sobre muros o vigas rígidas, de la norma actual(MÉTODO DE LOS COEFICIENTES), dividimos el panel en franjas en cada una de las direcciones ,la franja central,

igual a la mitad del panel, y medias franjas centrales de columna igual a un cuarto del panel.

FRANJA CENTRAL: Para una relación de  $m=La/Lb = \frac{3.75m}{4.75m} = 0.789$

Aproximadamente igual a 0.8

La=luz corta

Lb=luz larga

Momentos negativos en los bordes

$Ma(\text{negativo})=Ca*W*La^2$

$Mb(\text{negativo})=Cb*W*Lb^2$

Paso 3 Determinación, de los momentos negativos para ambas direcciones

Ca y Cb, se obtienen de la (tablas 1), para  $m=0.8$  y para un caso de apoyo, igual a 9, como esta estipulado en las tabla de coeficientes.

$Ca=0.075$

$Cb=0.017$

$Ma(\text{negativo})=0.075*14.71 \text{ KN/m}^2*(3.75m)^2=15.51 \text{ KNm}$

$Mb(\text{negativo})=0.017*14.71\text{KN/m}^2*(3.75m)^2=3.516 \text{ KNm}$

Paso 5 Determinación de los coeficientes para momento positivo carga muerta:

Calculo, de los momentos positivos, carga muerta:

$Ma(\text{positivo carga muerta})$

$Mb(\text{positivo carga muerta})$

Ca, posD Y Cb, posD obtenidos de la tabla 2 para m=0.8 y caso 9

$$Ca, posD=0.029$$

$$Cb, posD=0.010$$

Paso 6 Determinacion de los coeficientes para momento positivo carga viva:

$$Ma(\text{carga viva})$$

$$Mb(\text{carga viva})$$

Ca, posL Y Cb, posL obtenidos de la tabla 3 y para m=0.8 caso 9

$$Ca, posL=0.042$$

$$Cb, posL=0.017$$

Ya obtenidos los valores de los coeficientes, tanto para carga viva, y muerta en los diferentes ejes centrales. Para el calculo del momento, se multiplica por la distancia a analizar elevado al cuadrado y dividido por 8, se obtiene el momento positivo carga viva, y muerta. Al final, estos dos se suman, y se obtiene el momento positivo total en la franja central de cada una de las direcciones, así:

$$Ma(\text{pos D})=0.029*11.64 \text{ KN/m}^2*(3.75\text{m}^2)=4.74 \text{ KNm}$$

$$Mb(\text{posL})=0.042*3.06 \text{ KN/m}^2*(3.75\text{m}^2)=1.8 \text{ KNm}$$

$$Ma (\text{pos total})=6.54 \text{ KNm}$$

$$Mb(\text{posD})=0.010*11.64 \text{ KN/m}^2*(4.75\text{m}^2)=2.62 \text{ KNm}$$

$$M_b(\text{posL})=0.017*3.06 \text{ KN/m}^2*(4.75\text{m}^2)=1.17 \text{ KNm}$$

$$M_b(\text{pos total})=3.79 \text{ KNm}$$

Paso 7 Determinación, de los momentos negativos en bordes discontinuos:

$$M_{\text{aneg}}=1/3 \text{ del momento positivo}$$

$$M_{\text{bpos}}=1/3 \text{ del momento positivo}$$

$$M_{\text{anega}}=6.54 \text{ KNm}*1/3=2.18 \text{ KNm}$$

$$M_{\text{bneg}}=3.79 \text{ KNm}*1/3=1.26 \text{ KNm}$$

Paso 8 Determinación de los momentos en las franjas de columna:

Para los momentos en las franjas de columna, el código ACI, establece que se podrá tomar, como un momento promedio, de 2/3 de la franja central, aunque en realidad estos disminuyen linealmente en el limite de la franja central, hasta el borde de la viga hasta 1/3 del momento en la franja central. Ya que los momentos calculados por el método de los coeficientes, se suponen que son constantes en todo el ancho de la franja.

Vamos a tomar para un momento promedio de 2/3 de la franja central

$$M_a(\text{negativo})=10.34 \text{ KNm}$$

$$M_b(\text{negativo})=3.76 \text{ KNm}$$

$$M_a(\text{positivo})=4.36 \text{ KNm}$$

$$M_b(\text{positivo})=2.52 \text{ KNm}$$

$$M_a(\text{negativo})\text{borde discon}=0.72 \text{ KNm}$$

$$M_b(\text{negativo})\text{borde discon}=0.42 \text{ KNm}$$

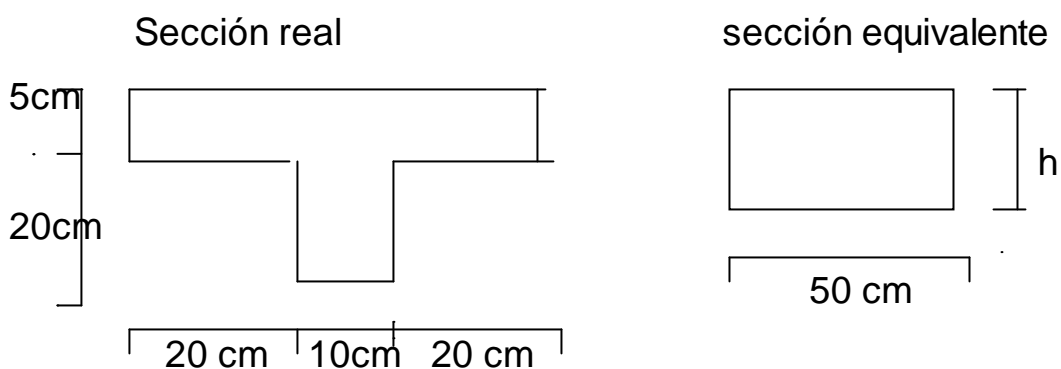
### 7.1.3 cálculo de la losa, por el método directo como losa aligerada.

Cálculo de la altura equivalente, para una losa nervada con respecto a una losa maciza.

La altura equivalente, debe ser aplicada a una sección uniforme de concreto, que equivale al espesor de una losa maciza, y la cual debe ser constante en cada punto de la losa. Caso que no ocurre, con una losa nervada, donde el espesor está influenciado, tanto por concreto como por el aligerante, por esta razón, debe calcularse esta altura, para poder hallar la rigidez relativa de la losa con respecto a la viga del borde.

Los pasos siguientes, nos determinaran el valor de  $h$  equivalente, seguidamente, con los que nos determinan el análisis propuesto.

El peralte equivalente de una losa nervada, se calcula determinando la altura de una losa maciza que tenga la misma inercia de la losa nervada propuesta.



$h =$  es el valor que necesitamos hallar.

1 cálculo del área de la viga T (1 nervio de la losa).

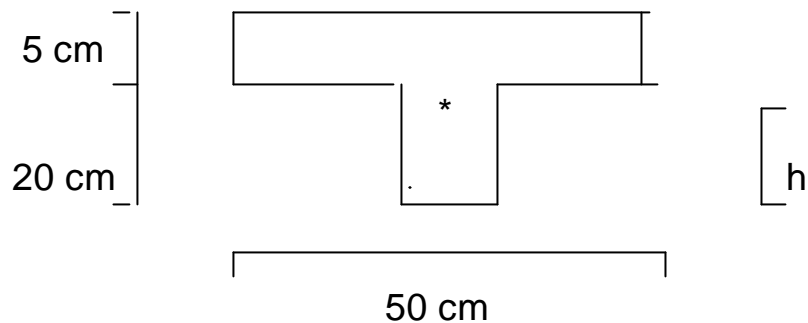
$$A = (5 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}) + (20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}) = 450 \text{ cm}^2$$

2. cálculo del momento que produce la viga T con respecto a su base:

$$h = [(5 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}) \times 22.5 \text{ cm}] + [(20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}) \times 10 \text{ cm}] = 7625 \text{ cm}^3$$

3. Cálculo de la posición del centro de gravedad de la viga T, con relación a la base del alma:

$$Y_6 = M/A = 16.94 \text{ cm}$$



4. Cálculo de la inercia de la viga T, con relación a su centro de gravedad

$$I = \frac{(50 \text{ cm}) \cdot (5 \text{ cm})^3}{12} + ((50 \text{ cm}) \cdot (5 \text{ cm})) \cdot (22.5 \text{ cm} - 16.94 \text{ cm})^2 + \frac{(10 \text{ cm}) \cdot (20 \text{ cm})^3}{12}$$

$$+ ((10 \text{ cm}) \cdot (20 \text{ cm})) \cdot (16.94 \text{ cm} - 10 \text{ cm})^2$$

$$I = 520.833 + 7728.4 + 6666.667 + 9632.72$$

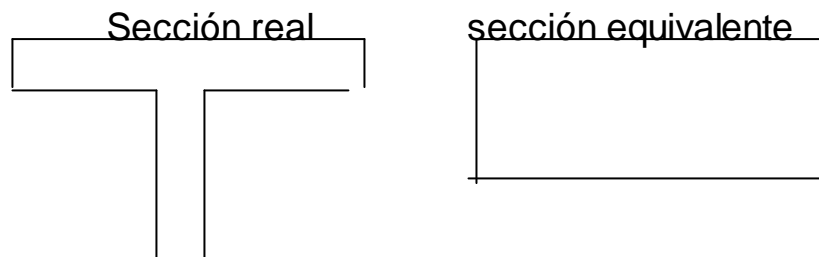
$$I = 24548.62 \text{ cm}^4$$

La inercia de la viga, tiene una altura efectiva constante, que debe ser la misma inercia de la viga T

$$\frac{50cm * h^3}{12} = 24548.62cm^4$$

$$h = \sqrt{\frac{(12 * 24548.62cm^4)}{50cm}}$$

equivalente=18.06cm



5 .Cálculo de la rigidez relativa de la viga de la losa

$$\alpha = \frac{EViga * Iviga}{Elosa * Ilosa}$$

Como E viga y E losa, son los módulos de elasticidad de los concretos, de la viga y de la losa la cual son iguales, la expresión se reduce a:

$$\alpha = \frac{Iviga}{Ilosa}$$

6 .Calculo del espesor mínimo de la losa

Como inicialmente se adopto un espesor de la losa, a partir de ésta una altura equivalente toca revisar si el supuesto es correcto mediante la ecuación

$$h_{\min} = \frac{Ln(800 + 0.0712 * f_y)}{36000 + 5000 * \beta * \left( \alpha m - 0.5 * (1 - \beta s) * \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right)}$$

Se adopto esta formula, por ser consecuente con las unidades del problema.

En donde:

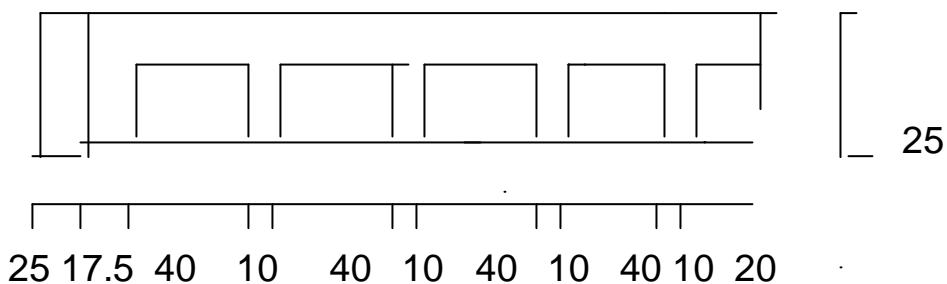
$$Ln = \text{luz libre del lado mas corto en cm} = 500 \text{ cm} - 25 \text{ cm} = 475 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/ cm}^2$$

$\alpha m$  = es el promedio de las rigideces relativas de las vigas y losas de todo el panel..

Se calculan los valores para los cuatro bordes de la losa:

1 Para el borde exterior en y



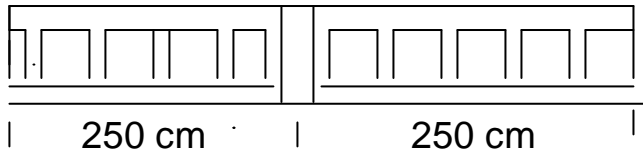
$$I_{viga} = \frac{(25\text{cm}) * (40\text{cm})^3}{12} = 133333\text{cm}^4$$

$$I_{losa} = \frac{(250\text{cm} + 12.5\text{cm}) * (18.06\text{cm})^3}{12} = 128855\text{cm}^4$$

La base de la losa es la distancia de centro a centro de paneles adyacentes

$$\alpha_{y \text{ izquierdo}} = \frac{133333 \text{ cm}^4}{128855 \text{ cm}^4} = 1.03$$

2. Para el borde interior en y

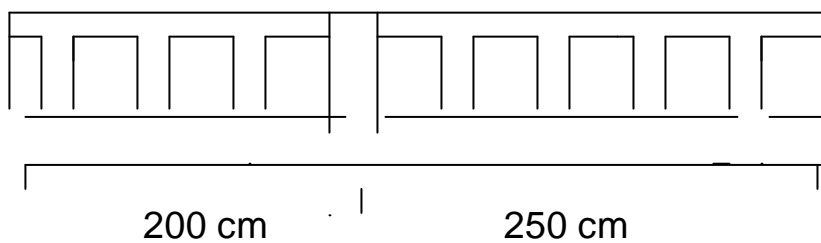


$$I_{\text{viga}} = 133333 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{losa}} = \frac{(500 \text{ cm}) * (18.06 \text{ cm})^3}{12} = 2455438.12 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_{y \text{ derecha}} = \frac{133333 \text{ cm}^4}{245438.12 \text{ cm}^4} = 0.54$$

3. Para el borde superior en x



$$I_{\text{viga}} = 133333 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{losa}} = \frac{(450 \text{ cm}) * (18.06 \text{ cm})^3}{12} = 220894.3 \text{ cm}^4$$

$$\alpha X \text{ superior} = \frac{133333 \text{ cm}^4}{220894.3 \text{ cm}^4} = 0.603$$

4. Para el borde x inferior, es el mismo que el superior ya que los paneles adyacentes tienen igual luz

$$\alpha X \text{ superior} = 0.603$$

$$\alpha_m = \frac{(1.03 + 0.54 + 0.603 + 0.603)}{4} = 0.694$$

Los demás parámetros:

$$\beta_s = \frac{\sum \text{bordes continuos}}{\text{perimetro de la losa}} = \frac{(5.00\text{m} + 5.00\text{m} + 5.00\text{m})}{(5.00\text{m} + 5.00\text{m} + 5.00\text{m} + 5.00\text{m})} = 0.75$$

Para paneles internos  $\beta_s = 1$

Para paneles de esquina  $\beta_s = 0.5$

Para paneles exteriores  $\beta_s = 0.75$

$\beta$  = relación entre la luz libre de la luz larga y la luz libre en la corta.

$$\beta = \frac{5.00\text{m}}{4.00\text{m}} = 1.25$$

Con estos valores, calculamos la altura mínima que debe tener la losa

---


$$h_{\min} = \frac{(475\text{cm}) * (800 + 0.712 * 4200 \text{ Kgr} / \text{cm}^2)}{36000 + 5000 * 1.25 * \left( 0.694 - 0.5 * (1 - 0.75) * \left( 1 + \frac{1}{1.25} \right) \right)} = 13.4\text{cm}$$


---

se verifica el menor valor que debe tener hmin=

$$h_{min} \geq \frac{Ln * (800 + 0.0712 * fy)}{36000 + 5000 * \beta * (1 + \beta_s)}$$

$$h_{min} \geq \frac{(475cm) * (800 + 0.0712 * 422Kgr / cm^2)}{36000 + 5000 * 1.25 * (1 + 0.75)}$$

$$h_{min} \geq 11.12cm$$

se verifica el mayor que requiere tener hmin:

$$h_{min} \leq \frac{Ln * (800 + 0.0712 * fy)}{36000}$$

$$h_{min} \leq \frac{(475cm) * (800 + 0.0712 * 4200Kgr / cm^2)}{36000} = 14.5cm$$

$$h_{min} \leq 14.5$$

$$13.4 \leq 14.5$$

se verifica que la altura equivalente de la losa nervada propuesta, supera la altura minima fijada por el código:

$$h_{equivalente} = 18.06cm \quad OK$$

7. Calculo de los momentos, y distribución de ellos a las secciones criticas de diseño, tanto negativos como positivos

- calculo de los momentos en la dirección Y, para el borde exterior

\* definimos los parámetros

L2/ L1 y  $\alpha L2/L1$  correspondientes a dicho panel y a la dirección de análisis

$$L2/L1=5/4=1.25 \quad \alpha=1.03$$

$$\alpha L2/L1=1.03*1.25=1.3$$

Con estos valores, se puede obtener el %, que toma la franja de columna del momento, tanto negativo como positivo, mediante, la (grafica1), de interpolación para la distribución lateral de momentos en la losa.

Como ya había dicho anteriormente, con el valor L2/ L1 se sube a la grafica de m (-), hasta corta las rectas  $\alpha L2/L1$ , para así obtener, en su parte derecha dichos porcentajes, tanto para este momento negativo como el positivo.

Por ejemplo, para estos primeros datos el % de M (-) y (+), son respectivamente de 68% y 68%, para los dos momentos, los cuales a partir del valor de Mo.

$$M_o = \frac{(2.625m * 17.12KN / m^2 * (3.75m^2))}{8} = 78.99KNm$$

Y seguidamente, al multiplicar este valor por el porcentaje que le corresponde tanto para m (-) = 65% y M (+)= 35 %, se distribuye a si a lo ancho de las secciones críticas. Por ejemplo para un momento negativo.

$M(-) = 78.99 \text{ KNm} \cdot 0.65 = 51.34 \text{ KNm}$ , así multiplicado por el 68%, que es lo que le toca a la franja de columna  $= 34.91 \text{ KNm}$ , la viga toma el 85%  $= 34.91 \text{ KNm} \cdot 0.85 = 29.67 \text{ KNm}$ , la losa toma un valor de  $= 34.91 \text{ KNm} - 29.67 \text{ KNm} = 5.23 \text{ KNm}$ , y la franja central toma el resto  $= 51.34 \text{ KNm} - 29.67 \text{ KNm} - 5.23 \text{ KNm} = 16.44 \text{ KNm}$ , y de forma similar es para  $M(+)$ , y a la vez para la franja interior, teniendo en cuenta que el valor de  $\alpha L_2/L_1$ , puede ser menor que 1, en este caso se debe calcular el valor que le corresponde a la viga por interpolación lineal.

Después, de haber realizado los cálculos anteriores, se obtiene la siguiente tabla. Pero hay que tener en cuenta que para obtener directamente los momentos que le corresponde a cada nervio, se debe dividir ese momento en la franja por el número de nervios contenidos en ella.

Tabla 10 Resultados del análisis en la dirección Y, del panel exterior, losa aligerada para cada una de las secciones críticas de diseño, método directo.

Dirección de análisis	Momento en la viga (KNm)	Momento en la franja de columna (KNm)	Momento en la franja central (KNm)
Y izquierdo			
M(-)	29.67	5.23	16.43
M(+)	15.97	2.82	8.85
Y derecho			
M(-)	20.62	15.32	15.4
M(+)	10.31	7.66	9.67

Para el análisis en la luz larga, esta se comporta como luz externa, ya que existe momento (-) exterior, positivo, y momento (-) interior, la cual toca adicionalmente, calcular los parámetros  $\beta t$ ,  $C$ ,  $L2/L1$  y  $\alpha L2/L1$ , que por cierto estos últimos varían por estar ya en otra luz.

$$L2/L1=4/5=0.8 \quad \alpha=0.603 \quad \alpha L2/L1=0.6*0.8=0.48$$

Los para metros  $\beta t = \frac{C}{2 * Ilosa}$

$$C = \sum \left( 1 - 0.63 * \frac{X}{y} \right) * \frac{X^3 * Y}{3}$$

X=es la proyeccion efectiva, del alma mas aya de la cara del alma, la menor entre  $4hf$  o  $h-hf$ .

$$4hf=4*0.1816m=0.72 > h-hf=0.40m-0.1806m=0.22m$$

$$C = \left( 1 - \frac{0.63 * 0.25}{0.40} \right) * \frac{0.25^3 * 0.40}{3} + \left( 1 - \frac{0.63 * 0.1806}{0.22} \right) * \frac{0.1806^3 * 0.2}{3}$$

$$C=0.00143$$

*ILOSA* es la calculada anteriormente

$$Iviga = \frac{b * h^3}{12} = \frac{4.5 * 0.1806^3}{12} = 0.0022m^4$$

$$\beta t = \frac{0.00143}{2 * 0.0022} = 0.32$$

con estos parámetros, entramos en la grafica de interpolación, y encontramos los porcentajes que toma la franja de columna, de los respetivos momentos en luz extrema. El paso siguiente, es buscar en la grafica de interpolación dichos porcentajes, de acuerdo a los mismos procedimientos que se utilizaron para losa maciza, partiendo de un momento igual a la distancia entre centros de

paneles adyacentes. Pero como esta distancia es diferente para ambos lados, se toma la media franja de columna que corresponde a esa franja, dicho momento es igual a 102.6 KNm.

$$L2/L1=0.8 \quad \alpha L2/L1=0.48$$

Adicionalmente, para el porcentaje que corresponde a la viga se debe hacer la interpolación lineal debido a que  $\alpha L2/L1 < 1$ .

La siguiente tabla nos resumen los resultados obtenidos

Tabla 11 Resultados del análisis en la dirección X , panel exterior, losa aligerada, para cada una de las secciones criticas de diseño, método directo.

Dirección de análisis X	Momento en la viga (KNm)	Momento en la franja de columna (KNm)	Momento en la franja central (KNm)
M(-)Interior	6.59	9.49	0.33
M(+)	17.02	24.5	16.96
M(-) exterior	22.9	33.05	25.86

NOTA: Estos momentos, son constantes en todo el ancho de las franjas, para obtener el momento en cada nervio, hay que dividir el valor de estas franjas, por el número de nervios contenidos en ella.

7.1.4 calculo por el método de los coeficientes, como losa aligerada.

Calculo del mismo panel, tipo losa aligerada.

Para el ejercicio, se tomaran las mismas cargas de diseño que los ejemplos anteriores,  $W=17.12 \text{ KN/m}^2$ , y las mismas propiedades de los materiales.

Paso 1 Cálculo de la relación  $m=L_a/L_b=3.75\text{m}/4.75\text{m}$

Este método, inicialmente calcula momentos en la franja central, tanto para  $M(-)$ , como para  $M(+)$ , y a partir de estas las distribuye a las franjas de columna como una decaimiento lineal, de su límite de la franja, hasta el borde de la viga hasta un tercio del valor del momento hallado en esta franja, tanto para  $M(-)$ , como para  $M(+)$ . También, para estas franjas de columna, se podrá tomar como un momento promedio, de  $2/3$  del momento en la franja de central. Estos momentos, se toman como si fueran constantes a todo lo ancho de las secciones.

Paso 2 Cálculo de los momentos negativos y positivos, en ambas direcciones

Momentos negativos en los bordes:

Mirando la (tabla 1), la cual, para  $m=0.8$  y utilizando el caso 9, que es el que se encuentra este panel .

$$C_a=0.075 \quad M_a= C_a * W_a * L_a^2$$

$$C_b=0.017 \quad M_b= C_b * W_b * L_b^2$$

$$M_a=0.075*0.5*17.12 \text{ KN/cm}^2*(3.75\text{m})^2=9.028 \text{ KNm}$$

$$M_b=0.018*0.5*17.12 \text{ KN/cm}^2*(3.75\text{m})^2=2.16 \text{ KNm}$$

Momentos positivos :

De la tabla 2 y 3, obtenemos los coeficientes correspondientes para carga muerta y viva.

$$C_a \text{ posD} = 0.029$$

$$C_b \text{ posD} = 0.010$$

$$C_a \text{ posL} = 0.042$$

$$C_b \text{ posL} = 0.017$$

$$M_a = C_a \text{ posD} * W_a * L_a^2$$

Donde  $W_a$  = es la carga muerta

$M_a \text{ posL} = C_a \text{ posL} * W_a * L_a^2$   $W_a$  = es la carga viva y a si sucesivamente para las dos direcciones,  $M_a = 0.075 * 0.5 * 17.12 \text{ KN/cm}^2 * (3.75\text{m})^2 = 9.02 \text{ KNm}$ .

$$M_a \text{ posD} = 0.029 * 14.04 \text{ KN/cm}^2 * 0.5 * (3.75\text{cm})^2 = 2.86 \text{ KNm}$$

$$M_a \text{ posL} = 0.042 * 0.5 * 3.06 \text{ KNm} * (3.75\text{m})^2 = 0.90 \text{ KNm}$$

$$M_a \text{ total} = 3.76 \text{ KNm}$$

$M_b$  positivo

$$M_b \text{ posD} = 0.010 * 0.5 * 14.05 \text{ KN/cm}^2 * (4.75\text{m})^2 = 1.58 \text{ KNm}$$

$$M_b \text{ posL} = 0.017 * 3.06 \text{ KN/m}^2 * 0.5 * (4.75\text{m})^2 = 0.58 \text{ KNm}$$

$$M_b \text{ total} = 2.16 \text{ KNm}$$

Momentos negativos en los bordes discontinuos ( $1/3$  \* los momentos positivos)

$$M_b \text{ neg} = \frac{2.16 \text{ KNm}}{3} = 0.72 \text{ KNm}$$

Y los momentos en la franja de columna ( $2/3$  momentos en las franjas central)

$$M_a \text{ neg} = 6.01 \text{ KNm}$$

$$M_a \text{ pos} = 2.50 \text{ KNm}$$

$$M_b \text{ neg} = 1.34 \text{ KNm}$$

$M_{bpos}=1.44 \text{ KNm}$

$M_{bneg \text{ borde dis}}=0.48 \text{ KNm}$

7.2 MONTAJE DE UNA LOSA TÍPICA , CON VARIOS PANELES PARA SER ANALIZADA POR LOS MÉTODOS DE LOS COEFICIENTES Y DIRECTO, CON LA AYUDA DE HOJAS DE CALCULO Y LOS ELEMENTOS FINITOS MEDIANTE LA MODELACION EN SAP- 2000.

A continuación, se presenta el diseño preliminar, de unas hojas de cálculo, la cual permite desarrollar, de forma más rápida los cálculos del ejemplo propuesto, por el método directo y de los coeficientes.

Esta hoja contiene, una entrada de datos los cuales son procesados, mediante las formulas en se desarrolla los métodos, y que se explicaron en el primer punto y en el marco teórico. Estas van incluidas en cada celda subsiguiente, para el calculo de la carga total de la losa, chequeo de espesores mínimos, calculo de coeficientes, momentos totales, y aquellos parámetros como: rigidez relativa, constante de torsión, que permitan finalmente, la distribución del momento estático total, a las secciones criticas, teniendo en cuenta que se trata de una losa aligerada, en donde las cargas son directamente recibidas, por los nervios, y de estas a las vigas y columnas. Para este caso se centrara mas, en el análisis de los nervios, por tal motivo es que después de haber realizado la redistribucion de momentos, a las secciones criticas , seguiría después repartirlas a los nervios en forma proporcional.

La hoja de cálculo, desarrolla: el cálculo, análisis y diseño, para cada panel de una losa.

Por tal motivo, es que se deben ingresar los datos por separado; de las longitudes de los paneles, y de los adyacentes además, del tipo de caso a analizar. Estos pueden ser exterior, panel de esquina e interior. Cada uno de estos maneja unos parámetros diferentes.

En la hoja de calculo, para el método de los coeficientes habrán unas tablas en donde, se abra que ingresar unos datos adicionales, que son leídos mediante una grafica de interpolación. Estos estarán, sombreados en las tablas correspondientes, para cada caso, acompañados de una breve nota que le guiara los pasos mencionados, además, del procesamiento de datos, de cómo y en donde se obtendrán, los resultados de los diferentes procesos.

También, en las hojas, para el ingreso se guiara como entrar estos datos y la unidad de medida.

Para la entrada de datos en el método de los coeficientes, se asemejaran a los del método directo en las dimensiones del panel, el espesor asumido, dimensiones de las vigas de borde y las propiedades mecánicas de los materiales. Adicionalmente estarán los que se desarrolla el método, llegando finalmente a unas tablas en donde esta el análisis de los momentos en las direcciones para cada panel.

### 7.2.1 Hoja de cálculo, para el análisis por el método directo

#### DISEÑO DE LOSAS EN DOS DIRECCIONES

##### ENTRADA DE DATOS

PROPIEDADES DEL MATERIAL	
FY(Kgr/cm <sup>2</sup> )	4200
F'c(Kgr/cm <sup>2</sup> )	210
RECUBRIMIENTO (m)	0,05
DENSIDAD DE ALIVIANAMIENTOS (Kgr/cm <sup>3</sup> )	0,0013
DIMENSIONES DEL PANEL	
EN DIRECCIÓN Y(m)      N Y (m)	4
EN DIRECCIÓN X(m)      N X (m)	5
DIMENSIONES DE VIGA DE BORDE	
b(m)	0,25
h(m)	0,4
INTRODUZCA EL VALOR H TENTATIVO TENIENDO EN CUENTA LOS ALIGERAMIENTOS H(m)	0,25
peso especifico carga viva según su uso( su utilización (Kgr/cm <sup>2</sup> )	180
LONGITUD PERPENDICULAR DE LOS PANELES ADYACENTES A LOS BORDES DEL PANEL A ANALIZAR(m)	
lx panel izquierdo	0
lx panel derecho	5
ly panel parte superior	5
ly panel parte inferior	5
CALCULO DEL PESO DE LA LOSA	
Peso propio de la losa será:	57,1086
por lo tanto las cargas aproximadas serán:	3,206096842
Alistado y desniveles	0,88
impermeabilización cubierta	
Afinado y cielo raso	0,44
mampostería	3,409090909
Alivianamientos	2,08

CARGA MUERTA TOTAL	10,01518775
CARGA VIVA	1,8
CARGA DE DISEÑO	17,08126285
CONTROL DE DEFLEXIONES A (m <sup>2</sup> )	0,045
CALCULO DEL MOMENTO DE LA VIGA T CON RESPETO ASU BASE (M <sup>3</sup> )	0,007625
CALCULO DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA VIGA T CON RELACIÓN A LA BASE DEL ALMA	0,169444444
CALCULO DE LA INERCIA DE LA VIGA T CON RELACIÓN A SU CENTRO DE GRAVEDAD	0,000245486
h EQUIVALENTE	0,180611773
Ln(m)	3,75
calculo del valor $\alpha$ para los cuatro bordes de la losa en la dirección X y Y	
I viga y lado izquierdo	0,001333333
I losa y lado izquierdo	0,001227431
$\alpha\psi$	1,086280057
I viga x parta superior	0,001333333
I losa x parta superior	0,002209375
	0,60348892
I viga y lado derecho	0,001333333
I losa y lado derecho	0,002454861
	0,543140028
I viga x parta inferior	0,001333333
I losa x parta inferior	0,002209375
<input type="checkbox"/>	0,60348892

$\alpha_m =$	0,709099481
calculo del coeficiente b:	0,8
calculo del coeficiente bs:	0,5
calculo del valor de hmin:	11,26484222
se verifica el menor que puede tener hmin: Hmini $\geq$	9,812857143
Se verifica el mayor valor que requiere tener hmin: Hmini $\leq$	11,44833333

### TABLA DE DISEÑO PARA LOS DIFERENTES PANELES

si es panel de sequina llene los espacios sombreados en las tablas 2 y 4
si el panel es exterior con lado discontinuo hacia arriba o hacia abajo llene los espacios sombreados en las tablas 2 y 5
si el panel es exterior con lado discontinuo hacia la izquierda o hacia la derecha llene los espacios sombreados en las tablas 4 y 6
si el panel es interior llene los espacios sombreados en las tablas 5 y 6
además las respuestas son las que corresponden a dicha tabla

Dirección de análisis	MO(Kgr-m)	M(-)	M(+)	M(-)	L2/L1
		Exterior		Interior	
y lado Izquierdo	78,81735056	0,16	0,57	□ 0,7	1,25
Y lado Derecho	78,81735056	0,16	0,57	0,7	1,25
	$\alpha_{L2/L1}$	c	$\beta_t$		
	1,357850071	0,00147041	0,598980126		
	0,678925035	0,00147041	0,299490063		

Valor en % que toma la	Valor en % que	Valor en %		
------------------------	----------------	------------	--	--

	toma al	que toma		
franja de columna del M(-)	franja de columna del M(+)	la franja de columna del		MOMENTOS
exterior		M(-) interior		
	94	75	75	lado izquierdo
	98	68	75	negativo ext
				positivo
				negativo int
				lado derecho
				negativo ext
				positivo
				negativo int

Respuestas

momento de la viga	momento en la franja de columna	momento en la franja central de la losa
10,0760101	0,64658888	0,302658626
28,64025476	1,83787731	4,492588982
35,17224269	2,25704231	5,517214539
7,131955745	1,90058357	0,100886209
17,62975795	4,69812623	5,750513897
23,87931611	6,36356107	5,517214539

Dirección de análisis	Mo(Kgr-m)	M(-)	M(+)	M(-)	L2/L1
		Exterior		Interior	
LADO SUPERIOR	102,3708107	0,16	0,57	0,7	0,8
LADO INFERIOR	102,3708107	0,16	0,57	0,7	0,8
	$\alpha L2/L1$	C	$\beta t$		
	0,482791136	0,00147041	0,332766737		
	0,482791136	0,00147041	0,332766737		

Valor en % que toma la	Valor en % que toma al	Valor en % que toma		
franja de columna del M(-)	franja de columna del M(+)	la franja de columna del		MOMENTOS
exterior		M(-) interior		
98	71	78	lado izquierdo	negativo ext
98	71	78		positivo
				negativo int
			lado derecho	negativo ext
				positivo
				negativo int

Respuestas

momento de la viga	momento en la franja de columna	momento en la franja central de la losa
6,587193402	3,44165444	0,163793297
17,00151256	8,88289255	8,460947501
22,93754845	11,9843324	7,882552421
6,587193402	3,44165444	0,163793297
17,00151256	8,88289255	8,460947501
22,93754845	11,9843324	7,882552421

Dirección de Análisis	Mo(Kgr/cm <sup>2</sup> )	M(-)	M(+)	L2/L1	$\alpha$ L2/L1
X superior	102,3708107	0,65	0,35	0,8	0,482791136
X inferior	102,3708107	0,65	0,35	0,8	0,482791136
valor en % que toma la franja de columna del M(-)	valor en % que toma la franja central del M(+)	respuestas			
		momento	momento en la viga	momento en la franja de columna	momento en la franja central
97	98	negativo	0,548630767	0,04400782	0,998115404
66	67	positivo	0,298462098	0,02394081	0,358297837
		negativo	0,017861605	0,19150417	11,31197458
		positivo	0,09851383	0,06433896	5,911914316

Dirección de Análisis	Mo(Kgr/cm <sup>2</sup> )	M(-)	M(+)	L2/L1	$\alpha$ L2/L1
y izquierdo	78,81735056	0,65	0,35	1,25	1,357850071
Y derecho	78,81735056	0,65	0,35	1,25	0,678925035

respuestas					
valor en % que toma la franja de columna del M(-)	valor en % que toma la franja central del M(+)	momento	momento en la viga	momento en la franja de columna	momento en la franja central
		negativo	0,573558431	-0,02786001	0,614775334
97	98	positivo	0,057430268	0,077423	0,220688582
66	67	negativo	0,195128126	0,05199938	6,96745379
		positivo	0,106660945	0,07816574	3,641361596

chequeo de las cortantes					
sección crítica de cortante	dirección y Vu (KN) para zona crítica	dirección x Vu (KN) para zona crítica	dirección y (KN/m <sup>2</sup> )cor tante ultima	dirección x (KN/m <sup>2</sup> ) cor tante ultimo	esfuerzo cor tante hormi gon (KN/m <sup>2</sup> )
25 cm de la cara de la viga	27,75705213	36,2976836	777,5084631	1016,74184	724,5688373
80 cm del eje de las vigas	20,49751542	29,0381468	574,1600959	813,393469	724,5688373

#### DISEÑO DEL REFUERZO DE LA LOSA

	ubicación	Mu(KNm)	b(m)	d(m)
luz en dirección Y derechos las dos medias franjas de columna	exterior neg.	1,90058357	0,1	0,21
	positiva	4,69812623	0,1	0,21
	interior neg	6,36356107	0,1	0,21
franja central	exterior neg	0,10088621	0,1	0,21
	positiva	5,7505139	0,1	0,21
	interior neg	5,51721454	0,1	0,21
luz en dirección Y izquierdo la media franja de Columna	exterior neg	0,64658888	0,1	0,21
	positiva	1,83787731	0,1	0,21
	interior neg	2,25704231	0,1	0,21
luz en dirección X inferior las medias franjas de columna	exterior neg	3,44165444	0,1	0,2
	positiva	8,88289255	0,1	0,2
	interior neg	11,9843324	0,1	0,2

Ru	W	P	As(m <sup>2</sup> )
0,022802716	0,02311707	0,00152	0,00003192
0,056366918	0,05837115	0,0033	0,0000693
0,007634838	0,00766944	0,000505	0,310505
0,001210407	0,00121127	0,000798	0,310798
0,068993196	0,07204655	0,0036	0,3136
0,06619413	0,06899425	0,0034	0,3134
0,007757608	0,00779334	0,00465	0,31465
0,022050382	0,02234406	0,00146	0,31146
0,027079417	0,02752508	0,00179	0,31179
0,04552453	0,04681366	0,003	0,303
0,117498579	0,12698381	0,006	0,306
0,158522916	0,17693905	0,0085	0,3085

franja central	exterior neg	0,1637933	0,1	0,2
	positiva	8,4609475	0,1	0,2
	interior neg	7,88255242	0,1	0,2
luz en dirección X superior la me dia franja de Columna	exterior neg	3,44165444	0,1	0,2
	positiva	8,88289255	0,1	0,2
	interior neg	11,9843324	0,1	0,2

0,002166578	0,00216935	0,000139	0,300139
0,111917295	0,12045178	0,006	0,306
0,111917295	0,12045178	0,006	0,306
0,04552453	0,04681366	0,003	0,303
0,117498579	0,12698381	0,0063	0,3063
0,158522916	0,17693905	0,0085	0,3085

7.2.2 hoja de calculo para el análisis por el método de los coeficientes

<b>ENTRADA DE DATOS</b>	
lado corto (LC) =	1
lado largo (LL)=	2
LC / LL =	0,8
CASO	9

<b>RESULTADOS</b>	
Ca M(-)borde con	0,075
Cb M(-)borde con	0,017
Ca M(+)carga muerta	0,029
CbM(+)carag muerta	0,01
CaM(+)carga viva	0,042
CbM(+)carga viva	0,017
W porción de carga A	0,83
W porción de carga B	0,17
f'c(Kgr/cm <sup>2</sup> )	210
Fy(Kgr/cm <sup>2</sup> )	4200
LONGITUDES DEL PANEL	
luz corta (m)	4
luz larga (m)	5
DEFINIR UN ESPESOR DE LA LOSA TENIENDO EN CUENTA LOS ALIGERAMIENTOS H (m)	
	0,25
RECUBRIMIENTO (M)	
	0,05
ENTRE DIMENSIONES DE LAS VIGAS DE BORDE	
b (m)	0,25
h (m)	0,4
ALTURA DE ENTREPISO (m)	
	2,5
CARGA POR METRO CUADRADO SEGÚN EL TIPO DE EDIFICACIÓN(KN/m <sup>2</sup> )	
	1,8
ENTRE EL CASO SEGÚN EL TIPO DE DISCONTINUIDAD O CONTINUIDAD EN LOS APOYOS:	
	5
CALCULO DE LA CARGA TOTAL DE LA LOSA	

El peso de la losa será:	57,1086
por lo tanto las cargas aproximadas serán:	
PESO PROPIO DE LA LOSA :	3,206097
ALISTADO Y DESNIVELES :	0,88
IMPERMEABILIZACIÓN CUBIERTA	
AFINADO Y CIELO RASO :	0,44
ALIVIANAMIENTOS	2,08
MUROS DIVISORIOS :	3,409091
<b>CARGA TOTAL MUERTA</b>	<b>10,01519</b>
<b>CARGA VIVA :</b>	<b>1,8</b>
<b>TOTAL CARGA:</b>	<b>17,08126</b>
<b>FARNJA CENTRAL</b>	
momentos negativos en los bordes:	
Ma (negativo)	9,007697
Mb(negativo)	3,275866
momentos positivos	
Ma(positivo carga muerta)=	2,042159
Ma(positivo carga viva)=	0,531563
Ma (positivo total)	2,573722
Mb(positivo carga muerta)=	
Mb(positivo carga viva)=	0,345206
Mb (positivo total)	1,475045

Adicionalmente se deben calcular los momentos en las franjas de columna iguales a dos tercios de del momento en la franja de columna, también en aquellos Paneles donde se tienen bordes discontinuos se deben calcular aquellos momentos negativos igual a un tercio del momento positivo

#### RESUMEN DE LOS MOMENTOS

dirección	momento	franjas centrales	franjas de columna
A	negativo	9,007697	6,42
	positivo	2,573722	2,47
B	negativo	3,275866	6,44
	positivo	1,475045	2,47
	negativo	1,23	0,82
	discontinuo		

calculo de las cortantes

dirección de	V(KN)
--------------	-------

Análisis	
luz menor	13,29
luz mayor	3,44

7.2.3 Modelación con el programa sap-2000, para el análisis mediante elementos finitos.

Procedimiento y montaje, de un modelo de losa, el mismo que se analizó por el método de los coeficientes y directo.

El sistema a analizar, es una losa aligerada, con ladrillo en el cual se conocen las dimensiones de las vigas de borde 40\*25 cm., espesor de losa de 25 cm, nervios espaciados cada 50 cm, y dimensiones igual a 10\*20 cm, loseta de compresión de 5 cm, con respecto a los materiales se trabajará con un  $f'c$  de 210 Kgr/cm<sup>2</sup>, acero de 4200 Kgr/cm<sup>2</sup>.

Los siguientes, son los pasos para el montaje de la losa en el programa:

\*se debe definir, la geometría, las distancias, de cada panel, y el espaciamiento entre cada nervio.

Para el problema, se adicionará unas viguetas perimetrales, para asegurar el espaciamiento uniforme, entre nervio y nervio con respecto a las dimensiones de los paneles. En el panel igual a 5 m, se tienen 8 nervios, en cada una de estas direcciones. En las luces de 4 m, se tienen un total de 7 nervios. El primer paso, en el programa es dibujar todos los nudos y elementos por medio de elementos tipo alambre, en tres dimensiones, inicialmente se debe definir un sistema de coordenadas con respecto a un nudo, y a partir de este comenzar a dibujar cada uno de los elementos teniendo en cuenta que se debe hacer, siguiendo el sentido de los ejes; para nuestro caso se va utilizar un eje coordenado (xy), tal como muestra la (figuras 13).

Figura 13 Coordenadas de los ejes.

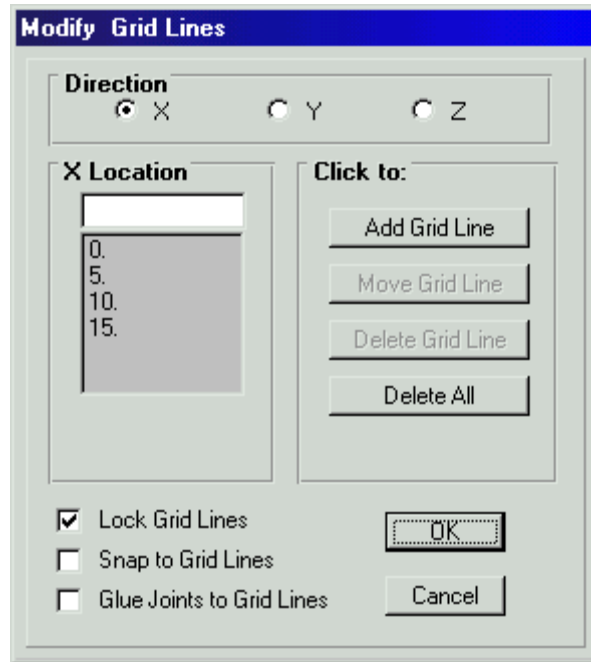
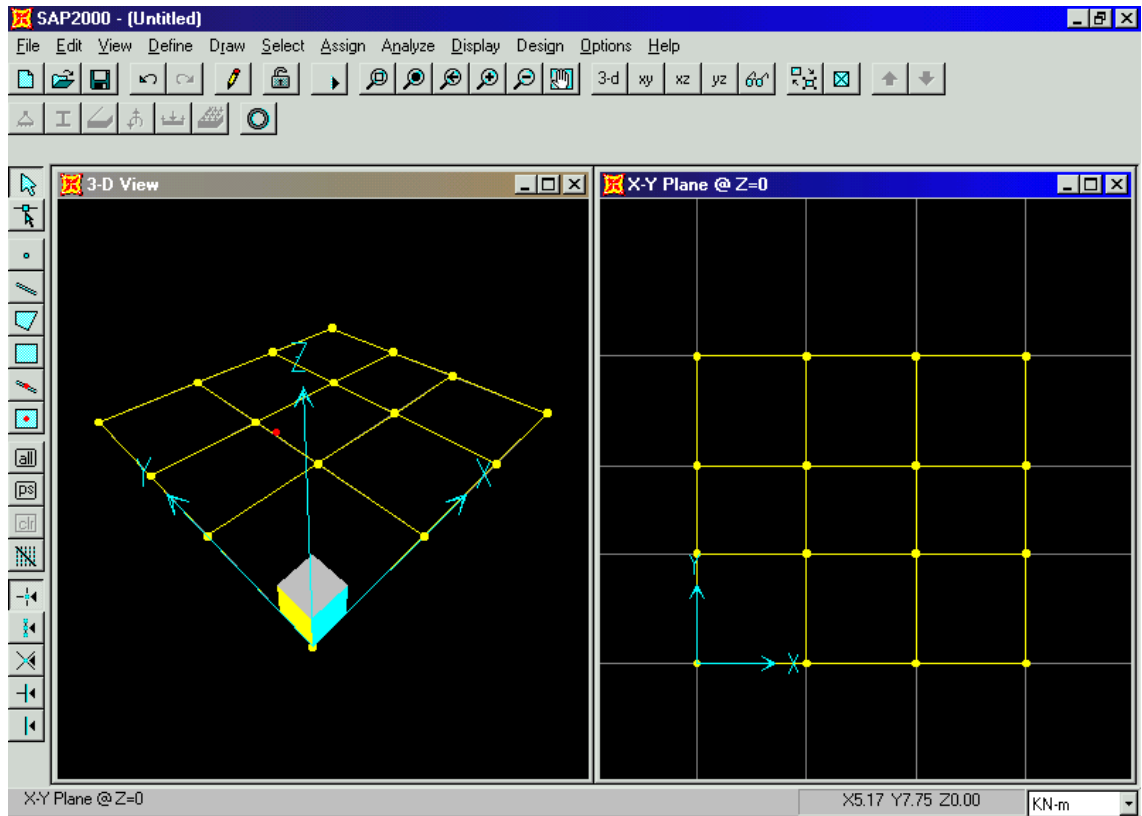
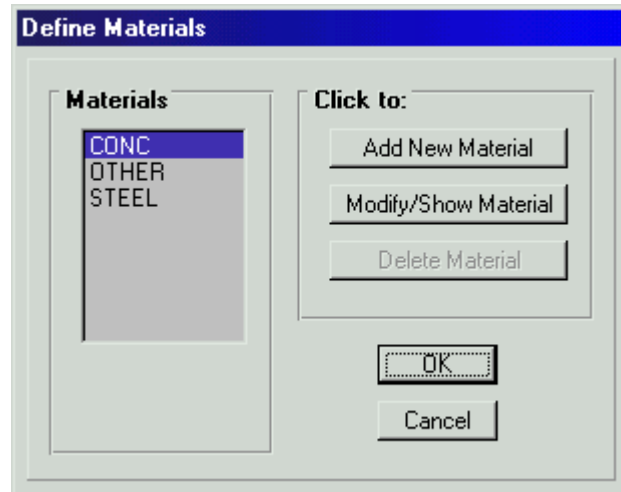


figura 14 Dibujo elemento frame, o alambre



El paso siguiente, es definir el tipo de material a trabajar, los cuales pueden ser; concreto y acero. Para nuestro caso, utilizaremos concreto seleccionando, CONC, o en el mejor de los casos seleccionar un nuevo material, haciendo clic en Add New Material, tal como muestra la (figura 15).

Figura 15 Definición de materiales



Una vez definido el tipo de material, se de deben definir las propiedades mecánicas de los materiales, en especial: peso específico del concreto, que es igual a 24 KN/m<sup>3</sup>, modulo de elasticidad igual a,  $3900 \cdot \sqrt{f'_c}$ , como muestra la (figura 16).

Figura 16 Propiedades mecánicas de los materiales

The 'Material Property Data' dialog box is divided into several sections:

- Material Name:** CONC
- Type of Material:**  Isotropic,  Orthotropic
- Type of Design:** Design: Concrete
- Analysis Property Data:**

Mass per unit Volume	2.44
Weight per unit Volume	24.
Modulus of Elasticity	17872045
Poisson's Ratio	0.2
Coeff of Thermal Expansion	9.900E-06
Shear Moduli	7446685.
- Design Property Data:**

Reinforcing yield stress, fy	413685.5
Concrete strength (Cylinder), fc	27579.032
Shear steel yield stress, fys	275790.32
Concrete shear strength, fcs	27579.032

At the bottom are 'OK' and 'Cancel' buttons.

Una vez definidos las propiedades de los materiales, se define el tipo de secciones transversales, como por ejemplo, nervios, viguetas y vigas, a los cuales se les da un nombre fácil de identificar, para luego ser asignado gráficamente, a cada uno de los elementos descritos en la (figura 17), posteriormente en la (figura 18), se le asignan las longitudes en donde el primer dato es la altura de la sección y seguidamente la base.

Figura 17 Definir secciones de vigas, viguetas y nervios

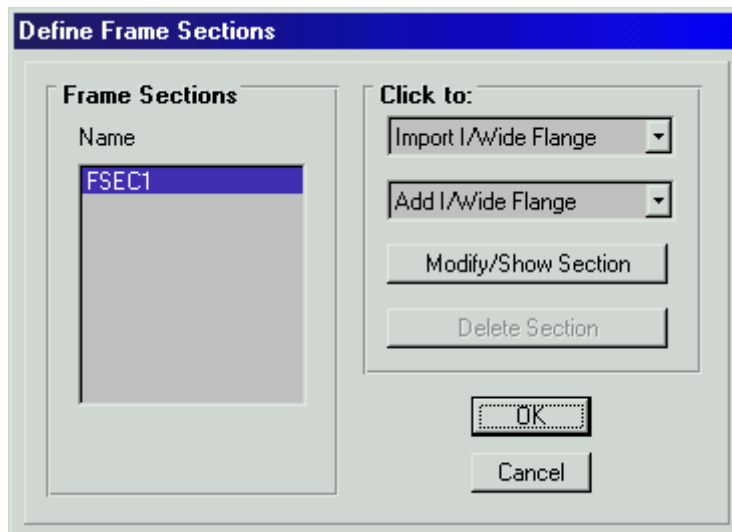
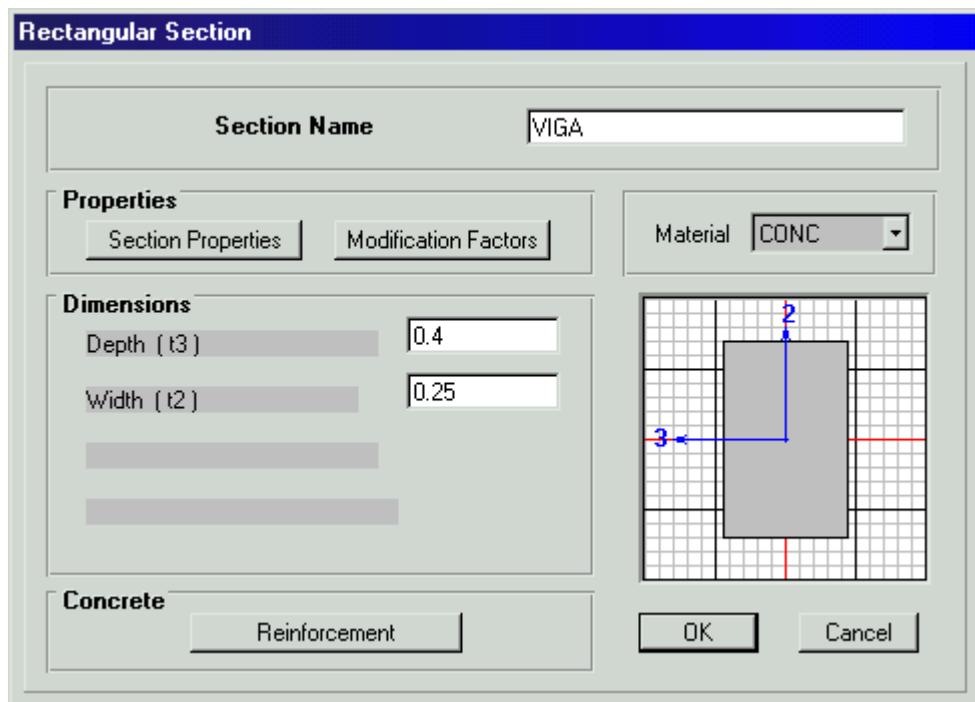
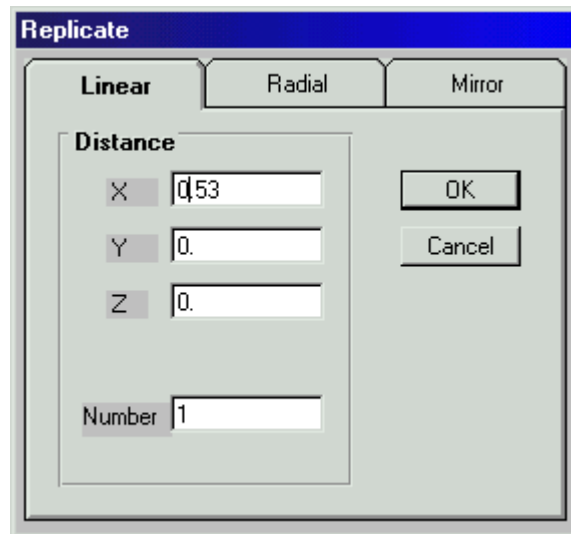


Figura 18 Dimensiones de las secciones



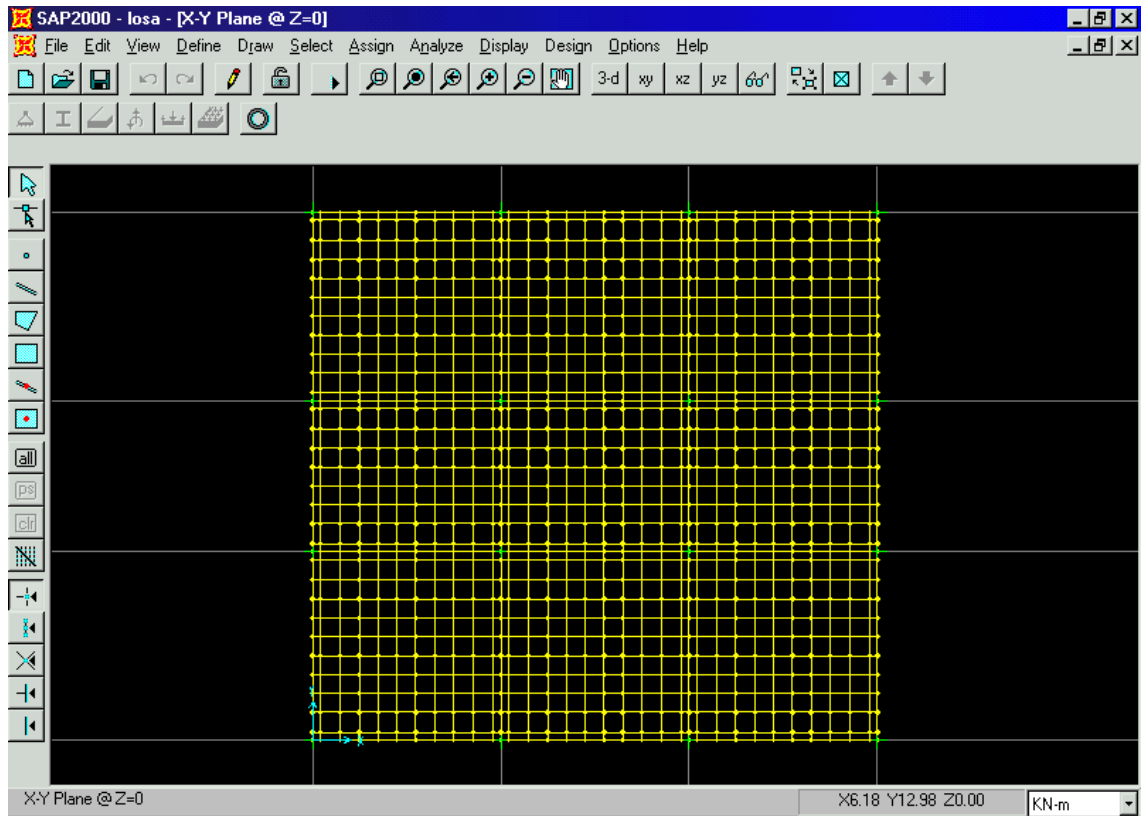
El paso siguiente, es dibujar cada uno de los elementos que componen la losa, primero dibujando las vigas, ya que estas están incluidas en el eje de coordenadas, a partir de estas y en forma consecutiva se trazan las viguetas que son las mas próximas, y a partir de estas, a todo el ancho de las losa, se construyen los nervios . Ya que el programa permite hacer iteraciones, con solo darle el número de elementos en el recuadro (number) de la (figura 18), ya que en este caso el número de nervios, van igualmente espaciadas. Hay que tener en cuenta, que este trazado se debe hacer en las dos direcciones ortogonales, o sea en las direcciones ( XY), iniciando en las vigas y a partir de estas, a lo ancho de las secciones.

Figura 19 Distancias a las que se ubica cada elemento



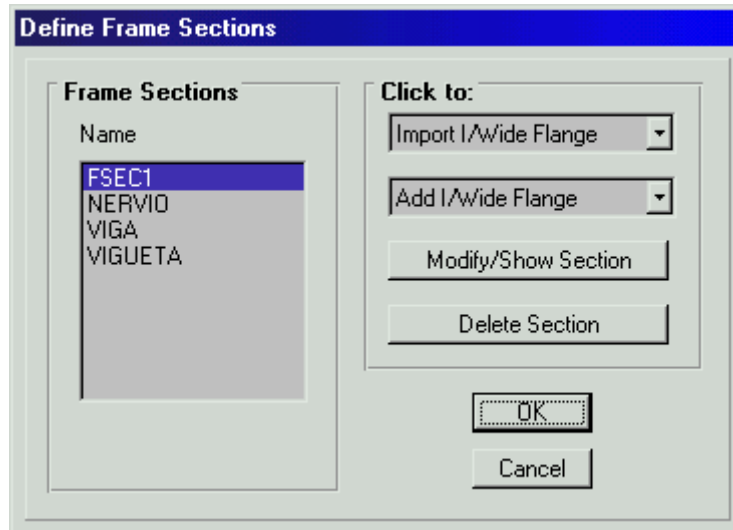
Después de haber concluido con el trazado final de los elementos, nos queda el esquema que se muestra en la (figura 20).

Figura 20 Esquema general de la losa



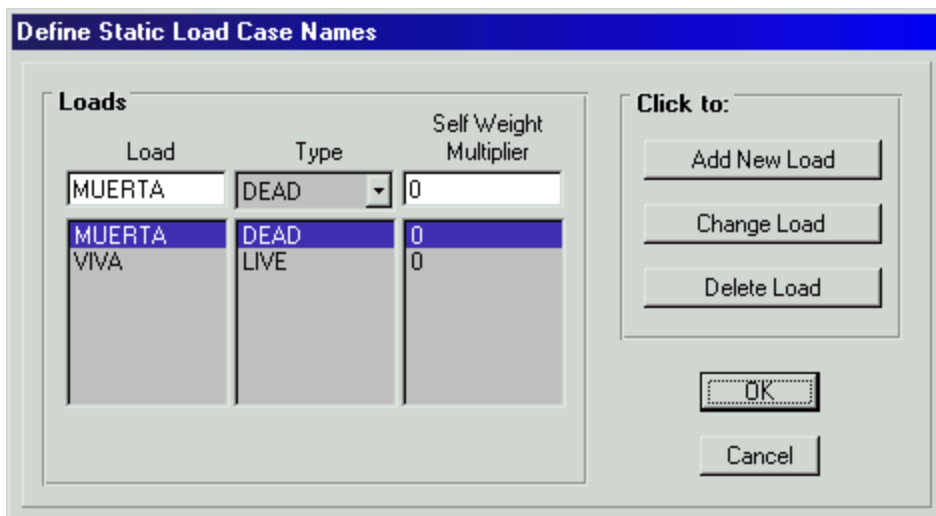
Después de haber hecho el esquema de la losa, el paso siguiente, es darle secciones a cada uno de los elementos que componen la losa, como son: nervios, viguetas y vigas, como muestra la (figura 21), asignando de manera grafica, pulsando con el maus sobre cada elemento su respetiva sección.

Figura 21 Selección de elementos estructurales



El paso siguiente, es la definición del tipo de carga a utilizar, ya que al tratarse de losas. Las cargas mas comunes, son debidas; a carga muerta y carga viva como muestra la (figura 22).

Figura 22 Casos de carga



Ya que estamos trabajando con dos tipos de cargas, cada una con diferentes implicaciones para el cálculo de una estructura, toca hacer una combinación, para a si asegurar que esta cumpla con los requisitos establecidos por la norma de construcción NSR. Además, que cumpla los requisitos de resistencia y seguridad.

En el recuadro de la (figura 23), nos da la opción de elegir esta posibilidad

Una vez definido, la combinación, el paso siguientes, es definir los coeficientes o factores, tanto para carga muerta, un coeficiente de 1.4, y para carga viva un coeficiente de 1.8, que son los mas utilizados para sistemas de losas, descritas en la (figura 23).

Figura 23 Recuadro de combinación

Case Name	Scale Factor
MUERTA Load Cas	1.4
MUERTA Load Case	1.4
VIVA Load Case	1.7

El paso siguiente es definir, como muestra en la pantalla, el símbolo de cargas, que para este caso se van a utilizar, cargas uniformemente distribuidas a lo largo de los nervios como en la (figura 25), Cada una de estas cargas, se aplican de manera grafica seleccionando, a cada elemento o en el mejor de los casos, el programa le permite seleccionar una gran cantidad de elementos al mismo tiempo, para ahorrar tiempo y posibles errores en la entrada de los datos. Cave anotar, que estas cargas, deben ser introducidas por separado tanto la viva, como la muerta. El programa internamente, hace la combinación después de haberla definido mucho antes. En el recuadro de la (figura 25), se puede observar la opción de carga muerta, en la cual esta la especificación, de ser carga gravitacional, también están las opciones de cargas puntuales, y en la parte mas inferior esta la que nos interesa, para la modelación, que es; carga uniformemente distribuida (unifor load) .

Para nuestro caso, la carga no estaba en las unidades de carga uniformemente distribuida, por lo que se tubo que hacer unos cálculos adicionales, ya que esta carga esta en unidades de fuerza por unidad de área, por lo que toca multiplicarla, por un área aferente, que corresponde tanto para la zona mas cercana a la viga de borde, y a las zonas mascentrales, para luego convertirla, en carga uniformemente distribuida. El proceso para la obtención de esta carga es la siguiente:

1 se trazan áreas aferentes, de un elemento los cuales están en las zonas cercanas a las vigas de borde y a las zonas más lejanas de estas. Posteriormente se multiplica esta área por la carga total por metro cuadrado de losa, obteniéndose así una carga puntual, seguidamente al dividir esta por su respectiva longitud, se obtiene la carga de análisis y de diseño por metro lineal.

Estas áreas aferentes, son por lo general líneas trazadas a 45 grados, al cual forman triángulos y trapecios en donde toca calcular dichas áreas, para calcular las cargas e ingresarlas al programa. Aunque el programa sap.2000 le permite la opción de calcularle ella misma, el peso propio, mas no la carga viva o particiones.

Figura 24 Selección de la cargas

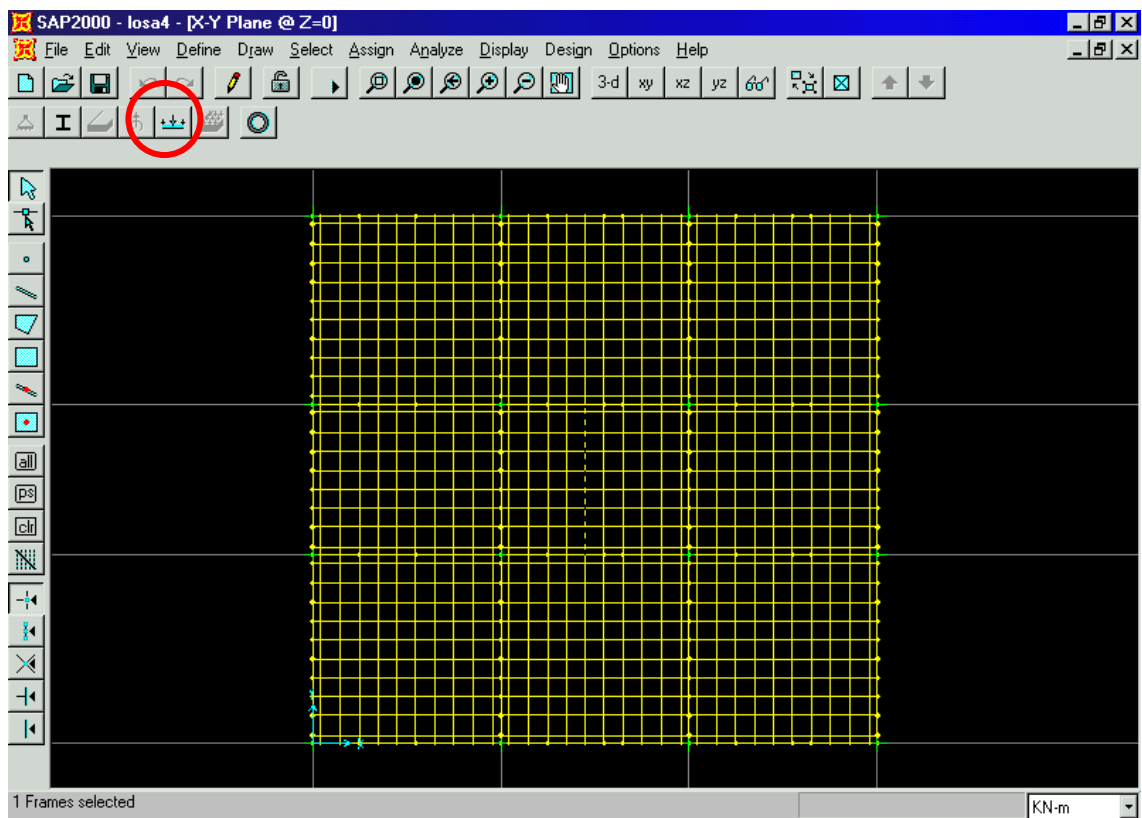
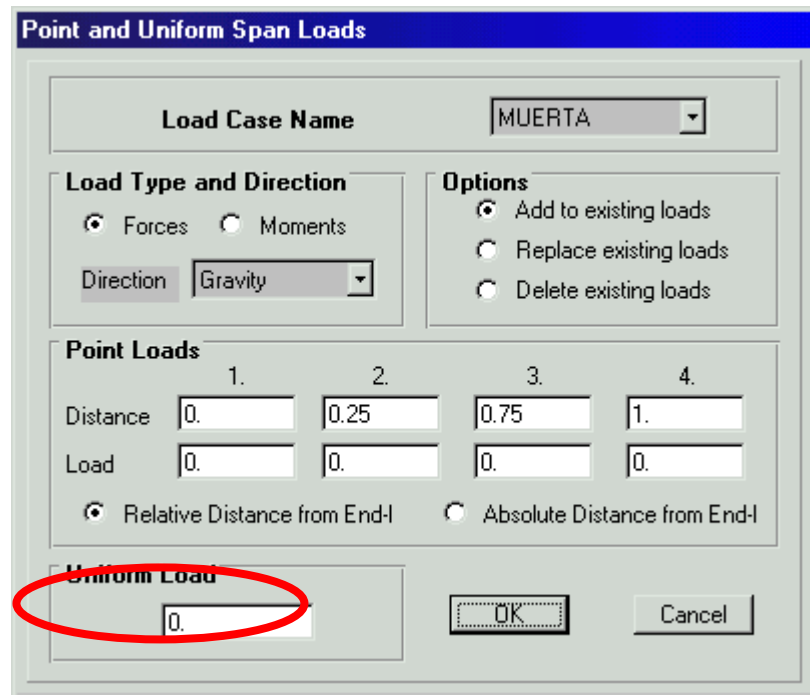


Figura 25 Selección de la carga uniformemente distribuida



El paso siguiente, es la elección del tipo de apoyo o unión de cada elemento, como son: nudos rígidos y articulados con posibilidad de rotación. El tipo de unión a ingresar en el programa incurrirá mucho, en los resultados esperados .En la pantalla de la (figura 26), muestra la elección de este elemento.

Figura 14 Elección de apoyos

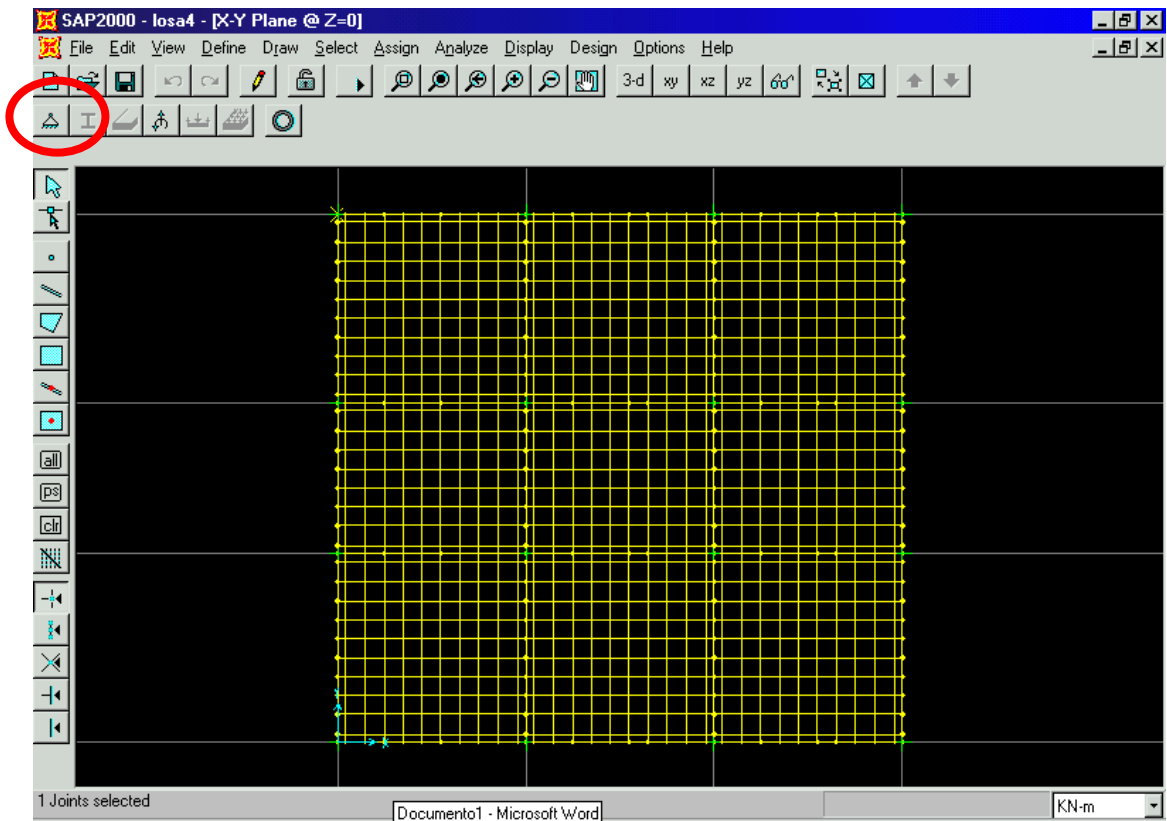
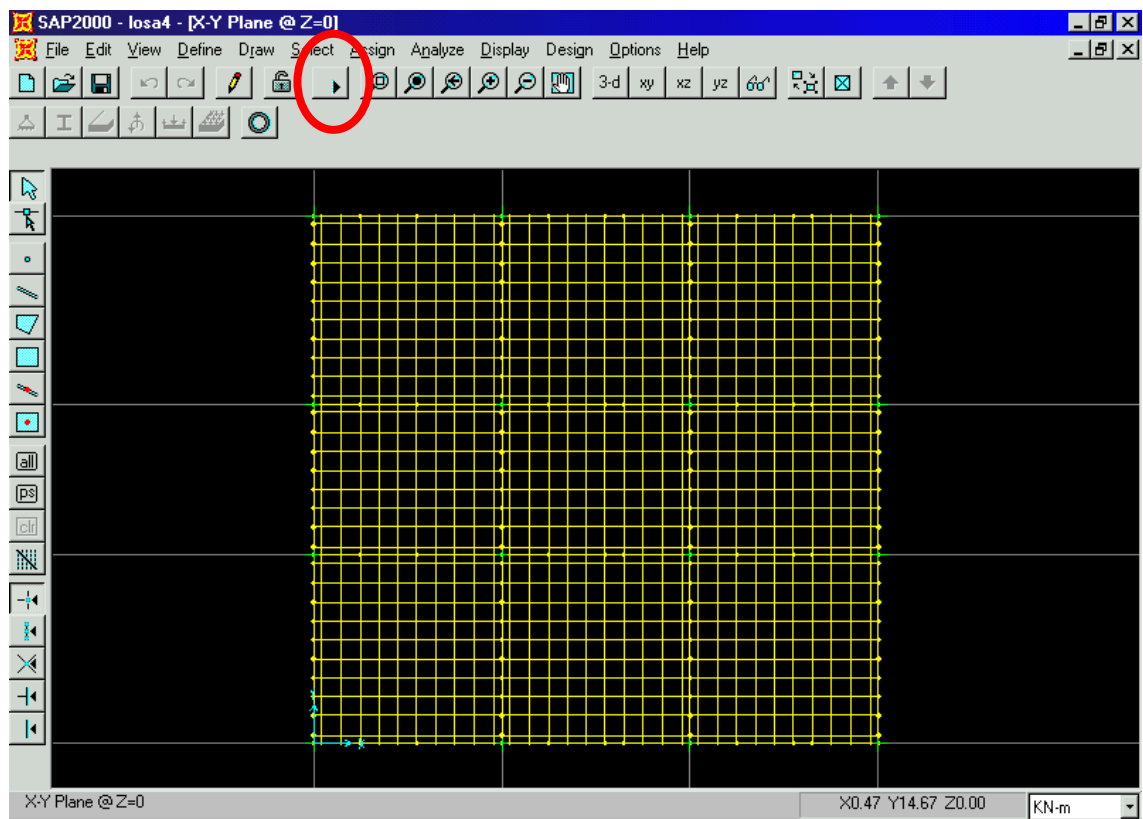


Figura 27 Elección del tipo de apoyo



Después de haber ingresado cada uno de los datos, en su respectivo orden y de la forma correcta en la pantalla de la (figura 28), nos permite mostrar el icono, con el cual se procede a correr el programa.

Figura 28 Análisis de la información



La (figura 29), muestra el procedimiento de cómo avanza el programa, en cada uno de los cálculos.

Figura 29 Procesamiento de la información



Después de haber corrido el programa y después de haber terminado los cálculos, en la pantalla nos muestra los iconos que corresponden al análisis de fuerzas, tanto externas como internas. El triángulo es la deformada, la j son las reacciones, y la f son fuerzas internas: como cortante y momentos, tal como lo muestra la (figura 30).

Figura 30 Análisis de fuerzas internas y externas

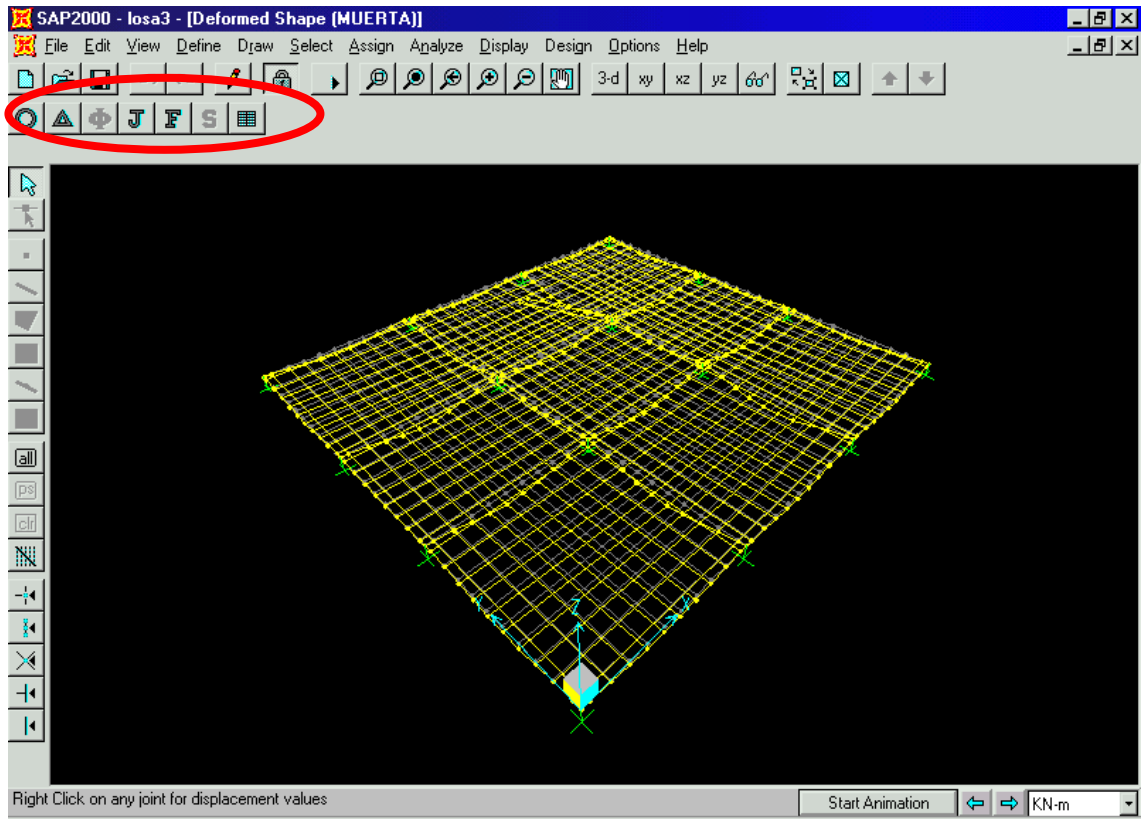
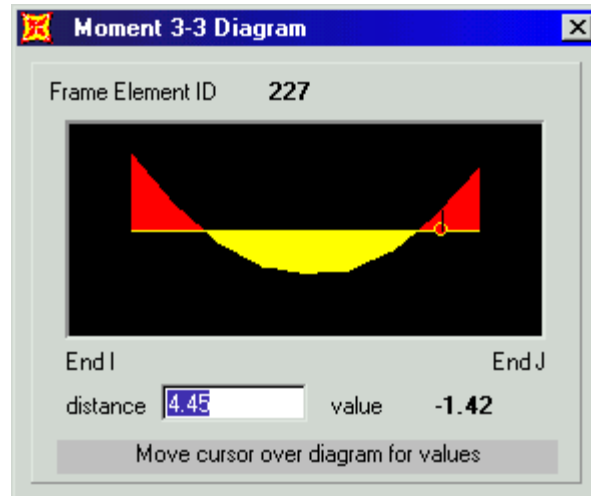


Figura 31 Momentos y cortantes en los diferentes ejes



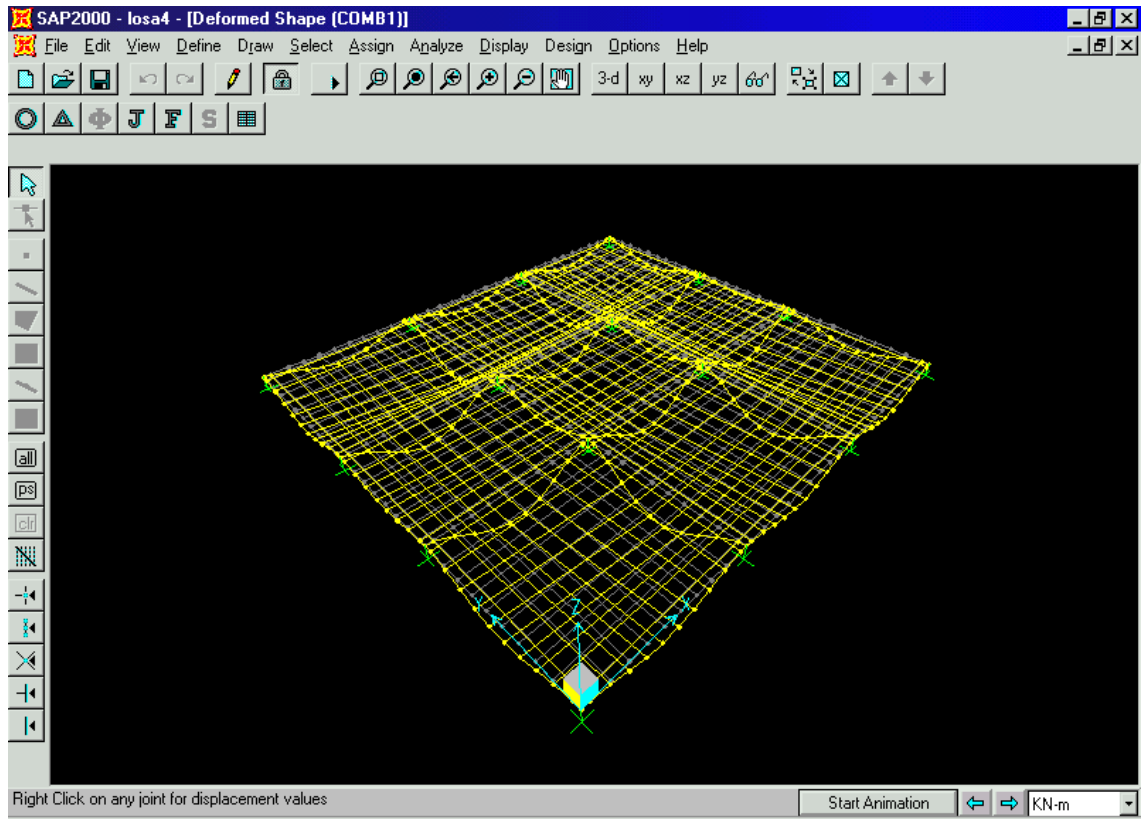
En la (grafica 31), se puede ver la convención, para los momentos alrededor de los ejes principales. Esta supeditado, por la forma como se definieron los ejes para el análisis de los resultados, como por ejemplo; los de momento y cortantes, lo que significa para el caso del cuadro, que mi momento rota alrededor de ese, eje o sea que mi momento esta aplicado en dirección del eje 1- 1, los valores que están en la (figura 32), son las que se deben obtener, en el archivo de resultados. Finalmente se puede ver, como varia los momentos a lo largo de toda la longitud de cada nervio.

Figura 32 Diagrama de momentos flectores



Por ultimo, se puede observar la deformada de la losa, en donde se puede observar el efecto en dos direcciones por sus deformaciones en ambos sentidos, ante la imposición de cargas.

Figura 33 Deformada de la losa



#### 7.2.4 Resultado de los diferentes métodos

Tabla 12 Momentos negativos y positivos para cada una de las secciones por los diferentes métodos.

panel	dirección De análisis	secciones criticas a momento	método de análisis					
			elementos finitos		coeficientes		directo	
			momento	momento	momento	momento	momento	momento
			franja colu	franja cen	franja colu	franja cen	franja colu	franja cen
		(KNm)	(KNm)	(KNm)	(KNm)	(KNm)	(KNm)	
1	Y lado izquierdo	M(-)ext	4,73	8,61	1,19	1,79	1,04	0,48
		M(+)	2,99	5,59	3,58	5,38	2,95	7,22
		M(-)Inter.	2,94	5,86	6,43	9,65	3,62	8,87
	Y lado derecho	M(-)ext	8,94	8,61	1,19	1,79	3,9	0,16
		M(+)	5,9	5,59	3,58	5,38	9,64	7,22
		M(-)Inter.	7,34	5,86	6,43	9,65	13,065	8,87
	X superior	M(-)ext	2,75	5,59	1,19	1,79	1,04	0,48
		M(+)	2,83	5,24	3,58	5,38	2,95	7,22
		M(-)Inter.	5,25	9,48	6,46	9,65	3,62	8,87
	X inferior	M(-)ext	2,74	5,59	1,19	1,79	3,52	0,16
		M(+)	2,83	5,24	3,58	5,38	8,83	8,96
		M(-)Inter.	5,25	9,48	6,46	9,65	11,79	8,87
2	y lado izquierdo	M(-)ext	4,73	8,61	0,91	1,37	3,01	0,16
		M(+)	2,99	5,59	2,75	4,143	9,64	9,25
		M(-)Inter.	2,94	5,86	4,24	6,37	13,06	8,87
	y lado derecho	M(-)ext	8,94	8,61	0,91	1,37	3,01	0,16
		M(+)	5,02	5,59	2,75	4,13	9,64	7,25
		M(-)Inter.	7,34	5,86	4,24	6,37	13,066	8,77
	X superior	M(-)	4,66	8,76	7,85	11,78	3,36	8,24
		M(+)	2,16	4,07	3,12	4,68	1,81	4,43
	X inferior	M(-)	4,66	8,76	7,85	11,78	10,95	8,24
M(+)		2,16	4,07	3,12	4,68	5,45	5,5	
4	y lado izquierdo	M(-)	3,42	6,93	4,89	7,34	1,9	6,57
		M(+)	0,95	1,82	1,94	2,91	1,02	3,54
	y lado derecho	M(-)	6,12	6,93	4,89	7,34	5,57	6,16
		M(+)	2,31	1,82	1,94	2,91	2,78	3,86
	X superior	M(-)ext	3	6,32	0,91	1,37	3,79	0,16
		M(+)	2,71	4,98	2,75	4,13	9,8	8,48
		M(-)Inter.	5,17	9,38	24,24	6,37	13,22	7,93
	X inferior	M(-)ext	2,99	6,32	0,91	1,37	3,79	0,16
		M(+)	2,71	4,98	2,75	4,13	9,8	8,48
M(-)Inter.		5,18	9,38	4,24	6,37	13,22	7,93	
5	y lado izquierdo	M(-)	3,42	6,39	3,61	5,41	5,57	6,16
		M(+)	0,95	1,82	1,57	2,36	2,78	3,86
	y lado	M(-)	3,42	6,39	3,61	5,41	5,57	6,16

	derecho	M(+)	0,95	1,82	1,57	2,36	2,78	3,86
	X superior	M(-)	4,63	8,68	5,79	8,69	12,11	7,67
		M(+)	2,14	4,15	2,22	3,78	6,016	5,23
	X inferior	M(-)	4,64	8,68	5,79	8,69	12,11	7,67
		M(+)	2,14	4,15	2,52	3,78	6,016	5,23

Nota estos paneles son los mas comunes, el resto de los paneles no se calculan por simetria

### 7.2.5 Análisis de los resultados

En el método de los coeficientes, se puede observar que los momentos negativos en los bordes de los paneles, son mínimos al compararlos con los demás métodos, matemáticamente esto se debe, a que la viga gana rigidez de acuerdo con la ecuación:

$$\alpha = \frac{I_{viga}}{I_{losa}}$$

En donde, la inercia de la viga es constante, mientras que la de la losa, va variando en los bordes de los paneles. El área de influencia, o la longitud L2, ya no esta limitada por los ejes de paneles adyacentes, ya que estos no los tiene, por consiguiente; la base es pequeña, igual a un cuarto del panel, y como era de esperarse la rigidez relativa ( $\alpha$ ), tiende a aumentar, y  $\beta$ , tiende a disminuir.

Al observar el grafico de interpolación, para momento negativo exterior, y para un valor de  $\alpha$  L2/ L1, dado. Este ultimo, al ser proyectado a la grafica de  $\beta T$ , y de aquí en forma vertical hasta cortar, el correspondiente valor que corresponde a  $\beta T$ , y de aquí en forma horizontal hasta leer el porcentaje que corresponde a dicho momento. Se nota que este momento, va aumentando significativamente, hasta llegar casi al 100%. Esto significa, que la viga toma la mayor parte del momento, y los bordes exteriores de la losa, toman apenas una pequeña porción de ella. Es por esta razón, que los momentos en esta zona, son muy pequeños. Cabe anotar, que en general en lo que respecta al método

de los coeficientes, su análisis va mas enfocado a la franja central, como una franja de diseño, ya que es aquí donde se representan los máximos momentos positivos y negativos, en general según el tipo de panel, como se nota en el ejemplo analizado.

A la vez, este método, no tiene en cuenta el efecto que le proporciona, tanto a las vigas de borde como a los paneles adyacentes como son: la rigidez relativa y losa. Este método, no comparte esos parámetros, con los paneles vecinos, sino que su análisis se basa en un panel en particular, y separado de un sistema de losas. Este efecto, se refleja en una diferencia de momentos que llegan a un borde en común, tal como se muestran en los resultados arrojados.

Además, el método de los coeficientes, al basarse en una redistribución inelástica, que significa una disminución de los momentos flectores reflejados en los momentos torsores; por esta razón, es que los momentos negativos y positivos, son más bajos que en los demás métodos. Esto podría ser obvio, en la medida en que estos reparten proporcionalmente los momentos, a las secciones de columna, atenuando a si los momentos en la zona central.

El método directo: al tener en cuenta la rigidez relativa de los apoyos, se producen momentos muy pequeños en las zonas cercanas a los bordes, debido que este método se basa en análisis distributivos de momentos, a las secciones críticas. Por eso, todo aquel momento que no sea capaz de resistir la sección, esta se la asigna a otra, proporcionalmente. Por esta razón es que se presentan estos pequeños momentos negativos en esta zona, si la franja central, aporta lo mínimo de estas pequeñas zonas, es porque ella es capaz de soportar mucho. Por tal motivo, es que la determinación de estos momentos en la zona central, son mayores que en los demás métodos.

Los momentos negativos, en los bordes discontinuos de paneles exteriores, dan algo parecidos, con respecto al método de los coeficientes y directo.

En los elementos finitos, existe algún desfase con respecto a los demás métodos, en el caso de los momentos negativos en los bordes.

El método de los elementos finitos, se acerca más a los resultados con respecto al método de los coeficientes, siendo estos dos a la vez, menores que los obtenidos por el método directo.

El método de los coeficientes, al trabajar directamente con la redistribución inelástica, en la cual se tiene en cuenta el efecto que provocan los momentos torsores, minimizan o atenúan los momentos flectores. Por esta razón, es que estos dan muy pequeños, en especial, en las franjas centrales.

Cave anotar, que el método de los coeficientes, analiza cada panel en forma independiente, no tiene en cuenta los adyacentes, que en el caso que hubiera un panel adyacente, con una luz apreciable con respecto a la analizada, la distancia  $L_2$ , que es la distancia entre centros de paneles adyacentes se hace muy grande, al igual que la inercia de la losa, a si el parámetro  $B_t$ , disminuiría, y la relación  $\alpha L_2 / L_1$ , seria mínima, de acuerdo a la grafica de interpolación la viga tomaría, la menor parte de este momento, mientras que las demás secciones criticas de la losa, toman la mayor parte, como por ejemplo los momentos negativos, afectando a si directamente, al panel que se esta

analizando, debido que este método no trabaja por separado. Todos, y cada uno estos parámetros, si son tomados en cuenta en el método directo.

El método directo, toma en cuenta el efecto de la rigidez relativa de las vigas de borde: cuando la viga es muy rígida, es quien toma la mayor parte de los momentos, y el resto es distribuido a las diferentes secciones.

Con respecto a los resultados obtenidos, por el método directo, en especial, el análisis hacia los momentos negativos en los bordes de paneles adyacentes, estos son muy parecidos, con una proporción del 90%, y un 95%, de coincidencia de resultados, con respecto al método de los elementos finitos, de acuerdo a la (tabla 13), porcentaje, según la coincidencia de los diferentes métodos, con respecto a ,los análisis arrojados.

A continuación, se muestra una (tabla 13), con valores en porcentajes comparando, el método de los coeficientes, directos, y elementos finitos, con respecto a la aproximación de los resultados obtenidos para cada una de las direcciones, y de acuerdo al panel analizado como son ,el 1, 2, 3 y 5, que son los que muestran los diferentes casos de apoyo. El resto de los paneles por simetría, no son analizados.

Tabal 13 Porcentaje según la similitud de los resultados de los diferentes métodos

panel	dirección de análisis	elementos finitos Vs Método coeficientes	elementos finitos Vs Método directo	Método directo Vs método coeficientes
1	y	70	81	67
	x	91	67	68
2	y	69	57	41
	x	66	71	63
4	y	78	84	73
	x	67	66	43
5	y	88	66	69
	x	87	68	62

De los porcentajes obtenidos, se observa que, los resultados para las dos direcciones dieron mayores, para los elementos finitos, y método de los coeficientes en el Panel 1, de acuerdo a la (tabla 13).

Para los paneles, 2 y 3 de la (tabla 13), los resultados en ambas direcciones dieron muy similares, con respecto al método de los elementos finitos vs coeficientes y directos.

En general, para todos los tipos de paneles en ambas direcciones, en el método directo y coeficientes, son mas desfasados en los resultados, ya que cada uno de estos se basan en planteamientos teóricos diferentes: el método de los coeficientes, analiza por separado el comportamiento interno de los paneles dentro de un sistema de losas, por tal razón, es que los resultados dan muy pequeños.

El método directo, tiene en cuenta la variación de los momentos a los paneles adyacentes, podría decirse que trabaja como una viga continua, en donde las luces entre apoyos, trabajan en conjunto. Caso que no ocurre, con el método de los coeficientes.

El análisis, del método de los coeficientes y elementos finitos, se basa en una losa simplemente apoyada en los bordes, sin tener en cuenta el efecto de rigidez de estos apoyos.

El método de los elementos finitos, es mas general para cualquier tipo de losa, arrojando resultados para cualquier punto, donde se requiera saber el momento. Además, este método, se aleja del análisis en forma de franjas.

Los resultados obtenidos, por el método de los coeficientes, se asemejan mucho, con respecto a los elementos finitos, ya que este no tiene en cuenta el efecto de los apoyos, sino el que ejerce la propia losa; significativamente, estos resultados se acercan mucho a los que se esperan analizar en una losa real en la que se tiene en cuenta el efecto de los momentos torsores.

## 8. CONCLUSIONES

- \* Se analizo, por los métodos directos, coeficientes y elementos finitos, el comportamiento de losas en dos direcciones, llegando así, a un resultado mas optimo, tras su comparación numérica en donde se tuvo en cuenta, los planteamientos teóricos en que se fundamentan los métodos, y su aplicación frente a la análisis de estructuras, siendo los elementos finitos los mas adecuados.
  
- \* Se mostró, en forma teórica y práctica, el comportamiento de los diferentes métodos, y la forma como procede hacia la obtención del análisis de losas bidireccionales como: son los momentos flectores a lo ancho y largo de este tipo de losas.
  
- \* La presentación, de los diferentes métodos, que aun quedan otros por analizar, generan una motivación por quien requiera analizar una losa con efecto en dos direcciones, al encontrar en estos métodos la forma de aplicación y solución a estos problemas.
  
- \* El método de elementos finitos, y en conjunto de herramientas computacionales mediante la modelación, se ha convertido en una herramienta dispensable, en el análisis de todo tipo de estructuras, como son; aquellas irregulares en geometría y en planta, además de la solución a problemas de continuidad, como es el caso de losas y placas planas.

\* Con aplicación, de los elementos finitos, se logro modelar el ejemplo de la losa como; vigas y nervios, como elemento tipo alambre, que es la herramienta más adecuada para sistemas de losas aligeradas, teniéndose así unos resultados para luego ser comparados con los demás métodos.

\* El método de los coeficientes y el método directo, tiene una gran validez, debido a los planteamientos teóricos bien sustentados, en la aplicación y análisis de losas, teniendo en cuenta el correcto uso de las ecuaciones y el limitante, que estos métodos tienen frente al tipo de losa a analizar.

\* El método de los elementos finitos, es aplicable para cualquier tipo de losa, no importa las condiciones en que se encuentre, como es su irregularidad en planta y la condición de continuidad. Además, de que es un método muy preciso, en la medida en que los elementos se acerquen mas y mas.

\* Los planteamientos teóricos, en que se basa el método de los elementos finitos, son muy bien sustentados. Por tal motivo, es que en la actualidad tiene una gran acogida en el análisis estructural.

\* El método directo, al igual que los elementos finitos ,son aplicables para analizar losas con grandes luces y en donde se requiera tener en cuenta, el efecto de la rigidez de las vigas. A la vez el método directo, no es aplicable para losas en voladizo, ni tampoco placas individuales.

\* El método de los coeficientes, resulta ser una herramienta muy poderosa al igual que los elementos finitos, según los resultados en el análisis, al ser muy similares los valores entre ambas metodologías. Además, este método es de fácil aplicación, principalmente en el cálculo de losas de placas individuales, y en donde no se tenga en cuenta, el efecto de rigidez, si no la influencia de los momentos torsores, reflejados en unos coeficientes.

\* El anterior trabajo, puede servir de bases a estudiantes como a profesionales en el área de ingeniería, que deseen conocer los fundamentos teóricos y de los factores que afectan este tipo de estructuras.

## 9. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

TEMA	FEBRERO			MARZO					ABRIL				MAYO				
	9	16	23	1	8	15	22	29	5	12	19	26	3	10	17	24	31
Elaboración de la Idea																	
Escogencia del Tema																	
Establecer de parámetros																	
Recolección de la información.																	
Realización del preanteproyecto.																	
Entrega de lo anterior.																	
Aprobación del preant.																	
Filtración de Información																	
Analisis Información																	
Estudio detallado de la información																	
Aplicación del metodo coef																	
Entrega del anteproyecto.																	
Aprobación del anteproyecto.																	
Aplicación del método de los elementos finitos																	
Entrega del Proyecto																	
Corrección guía																	
Correccion final asesor t																	
Corrección del jurado																	

## 10. BIBLIOGRAFIA

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE INGENIERÍA SÍSMICA, Norma colombiana de diseño y construcción sismorresistente NSR-98, Tomo I. Capitulo C. 13, 5P

EVERARD, Noel J. , TANNER, John L. Diseño de Concreto Armado. 1996, Pág. 252-270.

NILSON, Arthur H. Diseño de Estructuras de Concreto Reforzad Mc Graw Hill, duodécima edición, 1999. Pág. 365-399.

PÉREZ ALAMA, Vicente, Diseño y Calculo de Estructuras de Concreto Reforzado. Trillas, 1993 Pág. 160-177.

SEGURA, Jorge Enrique. Diseño de Estructuras de Hormigón Armado. U. de. A , 1999 Pág. 251-289.

R. Park – W. L Gamble. Losas de Concreto Reforzado. Limusa. 1987. Pág. 64-6

## ANEXOS

